



UNIVERSITÀ  
DI TORINO



Dipartimento  
Filosofia  
e Scienze  
dell'Educazione



Dipartimento  
Fisica



Dipartimento  
Matematica



Atti del XI Convegno Nazionale  
di Didattica della Fisica e della Matematica  
**DI.FI.MA. 2023**

Insegnamento e Apprendimento  
della Matematica e della Fisica  
nel periodo post pandemia

*Torino, 11-12-13 ottobre 2023*

A cura di:

Daniela Marocchi  
Marta Rinaudo  
Marina Serio



Ministero dell'Istruzione e del Merito  
Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte



## **Insegnamento e Apprendimento della Matematica e della Fisica nel Periodo post Pandemia**

Atti del XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2023

A cura di D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio

**Responsabile del convegno:** Ornella Robutti

**Responsabili scientifici:** Giulia Bini, Alessio Drivet, Giulia Ferrari, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Ornella Robutti, Carlotta Soldano, Ada Sargenti, Marina Serio, Germana Trincherò

**Esperti Tecnici :** Tiziana Armano e Filippo Cosma Liardi

Collane@unito.it

Università degli Studi di Torino

ISBN 9788875903206



Quest'opera è stata rilasciata con

[licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale \(CC BY-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

*Disegno grafico:* Maria Grazia Imarisio

*Immagine di copertina:* rielaborazione grafica di Elisa Gentile, collage di Marina Serio



*Atti del XI Convegno Nazionale  
di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2023*

# **Insegnamento e Apprendimento della Matematica e della Fisica nel Periodo post Pandemia**

*Torino, 11-12-13 ottobre 2023*

A cura di:  
Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Marina Serio

## *Introduzione*

Il XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, svoltosi a Torino nei giorni 11-13 ottobre 2023, ha avuto come focus principale la riflessione sulle condizioni di insegnamento e apprendimento dopo la fase di pandemia, avviando una riflessione e condivisione di ciò che l'esperienza della pandemia ha insegnato, ad esempio dal punto di vista dell'uso didattico delle tecnologie. Si sono così evidenziate prospettive di sviluppo e di innovazione didattica.

Come di tradizione, la terza giornata è stata dedicata al GeoGebra Day.

Nelle sessioni plenarie si sono affrontati i diversi approcci epistemologici e didattici delle discipline STEM (*"Un punto di vista embodied alle discipline stem nel dialogo tra didattica della fisica e didattica della matematica: sensuous cognition e pensiero immaginativo-figurativo"*, *"Trovare un ordine nel disordine: breve guida allo studio dei sistemi complessi"*), nonché aspetti più prettamente didattici (*"Realtà virtuale e aumentata a scuola: strumenti e metodologie"*, *"La scienza dei dati e l'intelligenza artificiale in un innovativo curriculum liceale digitale e multidisciplinare"*, *"STEM all'aperto e online: attività con lo smartphone"*).

Il Convegno ha raccolto circa 300 persone, con la partecipazione di alcune scuole provenienti da fuori della Regione Piemonte.

Nelle prime due giornate sono stati presentati rispettivamente 15 comunicazioni per Matematica, 16 per Fisica e 13 comunicazioni interdisciplinari; 13 i workshop di matematica e 5 interdisciplinari. Nel GeoGebra Day e Altre Tecnologie, dopo la sessione plenaria, sono state presentate 6 comunicazioni e altrettanti workshop.

Il Convegno continua a rappresentare un momento importante di riflessione e condivisione di esperienze didattiche estese su tutto il percorso formativo a partire dalla scuola primaria fino ad arrivare alla scuola secondaria di secondo grado.

La pubblicazione on line degli Atti è fondamentale per mettere a disposizione di un ampio pubblico tutta la ricchezza delle esperienze didattiche che vengono presentate dai partecipanti al Convegno.

## **Sommario**

<b>PLENARIE</b>	<b>8</b>
L'embodied cognition come punto di incontro tra discipline STEM: Sensuous cognition e pensiero immaginativo figurativo (Santi G., Corni F., Fuchs H.)	9
Trovare un ordine nel disordine: Breve guida allo studio dei sistemi complessi (Caselle M.)	23
La scienza dei dati e l'intelligenza artificiale in un innovativo curriculum liceale digitale e multidisciplinare (Strano G.)	26
Codifica di software di Realtà Aumentata ad hoc per il laboratorio di Fisica ed eventi di comunicazione (Rosi T., Onorato P., Oss S.)	30
STEM all'aperto e online: attività con lo smartphone (Taranto E.)	39
<b>COMUNICAZIONI</b>	<b>50</b>
<b>WORKSHOP</b>	<b>303</b>
<b>Indice analitico degli autori</b>	<b>419</b>

## INDICAZIONE LIVELLO SCOLARE DELLE COMUNICAZIONI E DEI WORKSHOP

I	Scuola dell'Infanzia
P	Scuola Primaria
S_I	Secondaria I grado
S_II	Secondaria II grado
U	Università

<b>Comunicazioni Matematica</b>		
<b>Autori</b>	<b>Titolo del contributo</b>	<b>Livello scolare</b>
Adesso Maria Giuseppina, Capone Robeto, Fiore Oriana	Competenze matematiche e artefatti: un percorso nella scuola primaria analizzato con la teoria delle rappresentazioni semiotiche.	P
Borsoero Massimo, Moro Chiara	L'Apollonia della marmellata	P
De Giorgi Daniele, Casi Raffaele, Sabena Cristina	Il progetto FormArt: un'esperienza di educazione matematica informale al Museo d'Arte Contemporanea del Castello di Rivoli	P
Pera Elisa	Lo scoiattolo raccoglie le nocchie: osserviamo, contiamo e argomentiamo.	P
Ferrara Francesca, Ferrari Giulia, Lorenzo Anna, Tagliapietra Benedetta	Apprendimento cooperativo in contesto pre-algebrico: uno studio pilota nel progetto europeo PMATHS	P, S_I
Cerasaro Silvia	Le frazioni dinamiche	S_I, S_II
Scalambro Elena	Giornata della Memoria: proposte didattiche dalla storia delle STEM	S_I, S_II
Torre Matteo	Debate e didattica della matematica	S_I, S_II
Boscolo Alessandra, Morselli Francesca, Robotti Elisabetta, Quartara Simone	Promuovere il passaggio dall'aritmetica all'algebra. Un'analisi del ruolo dell'esempio in termini di razionalità	S_II
Jahier Matteo	Il problema di Monty Hall' - Una semplice introduzione al teorema di Bayes	S_II
Pancanti Stefania	La classe come "comunità di ricerca"	S_II
Quartara Simone, Morselli Francesca, Robotti Elisabetta, Boscolo Alessandra	DIVA al DIMA: un teaching experiment in ottica TRU. L'esperienza di un insegnante	S_II
Tallone Chiara, Carrino Stefania	Peer tutoring "inverso": coinvolgere e rendere protagonisti attivi gli studenti più fragili	S_II
Centomo Andrea	A Piday 3d lunch	S_II, U

<b>Comunicazioni Fisica</b>		
<b>Autori</b>	<b>Titolo del contributo</b>	<b>Livello scolastico</b>
Rinaudo Marta, Leone Matteo, Serio Marina, Giorda Cristiano, Tonon Marco	Il progetto "Flowing with the rivers" : fisica (e non solo) in modalità outdoor education	I, P, S_I
Bosia Chiara	Outdoor education e la fisica nella scuola primaria. Storia di un percorso alla scoperta della misurazione di lunghezze, tempo e velocità	P
Cerrato Giada	I moti apparenti del cielo notturno: la modellizzazione come metodo di indagine per i bambini della scuola primaria	P
Gazzera Chiara	Il laboratorio di fisica dall'aula al fiume. Un'esperienza di Outdoor Education sul galleggiamento nella scuola primaria	P
Camperi Aurora, Cirio Roberto, Ferro Arianna, Giordanengo Simona, Medina Elisabetta, Sacchi Roberto, Vignati Anna, Deut Umberto, Montalvan Olivares Diango Manuel, Fiorina Elisa, Pennazio Francesco, Mostardi Franco, Vallero Maria Beatrice, Cerello Piergiorgio, Ferrero Veronica, Rinaudo Marta	ESCAPE ROOM FISICA MEDICA – sblocca la scoperta della fisica in medicina	P, S_I, S_II, U
Amoroso Antonio, Rinaudo Marta, Leone Matteo, Serio Marina, Marocchi Daniela	Il museo di Fisica: strumento di ricerca didattica e storica	S_II
Bologna Valentina, Longo Francesco, La Mura Cristina, Piccoli Francesco	Cinematica Cooperativa: in-group problem-solving per superare gli effetti post-pandemici	S_II
Borgognone Roberto	Un'esperienza di cooperative learning e peer tutoring sui principi della dinamica	S_II
Cane Daniele, Giudici Laura	La Fisica del cambiamento climatico	S_II
Lacarbonara Mariangela, Marocchi Daniela, Rinaudo Marta, Serio Marina	Percorsi sperimentali alla scoperta della carica dell'elettrone	S_II
Marocchi Daniela, Serio Marina, Pace Francesco	Il percorso di ingresso alla Scuola di Scienze della Natura	S_II
Marocco Federica, Gentile Elisa, Viterbo Michelangelo	"Ricercatori all'opera": un percorso PCTO per sperimentare e imparare a realizzare esperienze di laboratorio	S_II

<b>Comunicazioni interdisciplinari</b>		
<b>Autori</b>	<b>Titolo del contributo</b>	<b>Livello scolastico</b>
Piccione Andrea	Intelligenza Artificiale e leggi fisiche	P, S_I, S_II
Baldi Barbara, Nardacchione Antonella	Rosalind Franklin e il DNA: un percorso per orientare alle STEM superando gli stereotipi di genere.	S_I
Baldi Barbara, Piccione Andrea	Meteo Open Data @ Santarosa	S_I
Ciaschini Katuscia	Progetto STEAM: "una tavola fanta-scientifica"	S_I
Alluto Giulio	Gamification e Inquiry nella didattica delle scienze naturali: esempi di attività.	S_I, S_II
Pecchio Paola, Marino Tommaso	La Natura fa scuola. Un proposta per la secondaria di primo e secondo grado.	S_I, S_II
Galante Dino, Marino Tommaso, Andrea Piccione, Luca Caffaratti, Francesca Galeno Mellucci	Intelligenza artificiale e problemi di fisica e matematica	S_II
Monaco Carmine, Cucchi Osano Maura, Giraudi Cristina, Zamblera Ferdinando	Numeri, legioni e squadrette. Laboratorio didattico per misurare la realtà	S_II
Paschetta Enrico	equazioni di secondo grado e velocità di reazione. La validazione di un modello scientifico	S_II
Torre Matteo, Davico Alessandro	Galileo con Arduino: approccio STEM a un'esperimento scientifico storico	S_II
Eugeni Daniele, Grosso Paolo	Vettori con la realtà aumentata	S_II, U

<b>Workshop Interdisciplinari</b>		
<b>Autori</b>	<b>Titolo del contributo</b>	<b>Livello scolastico</b>
Piccione Andrea, Bonino Raffaella	Intelligenza Artificiale e analisi di dati astronomici	S_I, S_II
Manolino Carola, Piroi Margherita, Armano Tiziana, Ducci Mattia, Funghi Silvia, Bernareggi Cristian, Brunetto Erika	La sonificazione dei grafici di funzione con Audiofunctions 2.0	S_I, S_II, U
Palma Antonella, Dragone Luca	La fisica dei galleggianti secondo Archimede con le Classi GeoGebra	S_II
Tomassi Laura	Non sfugga il movimento...	S_II
Pollani Lorenzo, Branchetti Laura, Morselli Francesca	Attività di analisi di libri di testo con il Family Resemblance Approach: un'occasione per riflettere sull'interdisciplinarietà tra matematica e fisica	U



<b>Workshop Matematica</b>		
<b>Autori</b>	<b>Titolo del contributo</b>	<b>Livello scolastico</b>
Bagossi Sara, Ferretti Federica, Soldano Carlotta, Taranto Eugenia	Esplorare la covarianza con il tracciatore fisico e digitale	P
Bellò Gianna, Pusceddu Chiara, Staffieri Caterina, Gasperin Riccardo, Cedrino Patrizia	Attività di sviluppo del pensiero proporzionale in ambiente immersivo di gioco: Minecraft Education	P, S_I
Piroi Margherita, Casi Raffaele, Sabena Cristina, Soldano Carlotta	Immaginare e visualizzare: la geometria nello spazio senza e con la realtà virtuale	P, S_I, S_II
Dragone Luca, Tossini Daniela	Da zero a Eulero: poliedri e grafi a scuola.	S_I
Aebischer Tullio	La costruzione euclidea per punti della Retta dei Numeri con GeoGebra	S_I, S_II
Cerrato Rossella, Monformoso Lara, Ascrizzi Martina	Danza, musica e matematica: una sinergia vincente per l'apprendimento	S_I, S_II
Manassero Marta, Di Giorno Michelangela, Adrovic Madlena	Giochiamo a Set con la matematica	S_I, S_II
Tallone Chiara, Alocco Ilenia, Carrino Stefania, Cavallera Laura, Durando Chiara, Isoardi Giorgia, La Paglia Luisa, Zamboni Francesca	Matepraticamente post-pandemia: tra TIC e materiali poveri per una didattica più inclusiva	S_I, S_II
Andriano Valeria, Doveri Andrea, Marchi Gloria, Polito Luigi, Porta Paola	Geometria analitica 3D con la scatola da scarpe	S_II
Troilo Federica, Bernardi Maria Lucia, Capone Roberto, Faggiano Eleonora	Parabolografi e GeoGebra per costruire competenze nel laboratorio matematico	S_II
Drivet Alessio	Modellizzare il Covid	S_II, U

## LA SONIFICAZIONE DEI GRAFICI DI FUNZIONE CON AUDIOFUNCTIONS 2.0

**Carola Manolino<sup>1,2</sup>, Margherita Piroi<sup>2</sup>, Tiziana Armano<sup>2</sup>, Erika Brunetto<sup>2</sup>, Mattia Ducci<sup>2</sup>, Silvia Funghi<sup>3</sup>, Cristian Bernareggi<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Dipartimento di Scienze Umane e Sociali - Università della Valle d'Aosta

<sup>2</sup> Laboratorio "S. Polin", Dipartimento di Matematica "G. Peano" - Università di Torino

<sup>3</sup> Dipartimento di Matematica - Università di Genova

[c.manolino@univda.it](mailto:c.manolino@univda.it)

### Abstract

Audiofunctions è un progetto del Laboratorio "S. Polin" del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università degli Studi di Torino. Si tratta di un'applicazione web che, attraverso tecniche di *sonificazione*, permette di ottenere grafici di funzione a una variabile reale, esplorabili anche tramite suono; è una soluzione inclusiva per l'accessibilità dei grafici di funzione. Durante il workshop è stato possibile testare la nuova versione, Audiofunctions 2.0, che comprende nuove funzionalità e l'aggiornamento delle precedenti, ed esplorare insieme ai docenti il potenziale didattico del software nell'insegnamento delle discipline STEM.

### Parole-chiave

Audiofunctions, sonificazione, inclusione, grafici di funzione, accessibilità

## INTRODUZIONE

### Contesto

L'educazione inclusiva ha assunto un ruolo di primaria importanza sin dalla Conferenza Mondiale dell'UNESCO del 1994 a Salamanca. In Italia, questa prospettiva è stata promossa attraverso la Legge 104 (Legge quadro per l'assistenza, 1992) e successive normative, contribuendo a sviluppare un sistema educativo più inclusivo, che a livello europeo si è affermato come modello di riferimento per le politiche inclusive, basate sull'accettazione e sull'apprezzamento della diversità come fonte di valore. Inoltre, l'Italia ha aderito alla Convenzione ONU sui Diritti delle Persone con Disabilità, che sancisce l'importanza cruciale di garantire alle persone con disabilità un accesso senza ostacoli a un'istruzione inclusiva e di qualità, a tutti i livelli, compreso quello universitario. Tuttavia, emergono delle sfide nell'applicare questi principi, specialmente per contenuti complessi delle discipline STEM. Grafici e formule, per esempio, sono mezzi di rappresentazione delle informazioni che possono non risultare accessibili per tutti, in quanto – diversamente dai contenuti testuali – richiedono un sistema predeterminato di regole per essere esplorati tramite le tecnologie assistive (Borsoero et al., 2014; Howell et al., 2022). Questa complessità rende difficile la progettazione di software accessibili e le soluzioni, laddove disponibili, sono costose e presentano limitazioni significative o limitano l'esplorazione dei contenuti: un aspetto che non è ancora stato pienamente esplorato dal punto di vista della ricerca in ambito didattico (Piroi et al., 2024). Queste sfide agiscono da deterrente per le persone con disabilità e con disturbi specifici dell'apprendimento, ostacolando il loro percorso di formazione scientifica e limitando l'accesso alle professioni STEM (Moon et al., 2012). Inoltre, l'accessibilità impatta profondamente sulle pratiche didattiche quotidiane, costringendo gli insegnanti a fornire materiali didattici differenziati, adottando una "doppia modalità di insegnamento" (quanto preparato per tutta la classe e quanto preparato per lo/gli studente/i con disabilità – magari dal docente di sostegno in totale autonomia) e operando esclusivamente a livello di accessibilità tecnica per rispondere a esigenze immediate (in assenza di metodologie didattiche inclusive per la classe). Tuttavia, rendere un contenuto

accessibile non garantisce necessariamente che lo studente *apprenda* il concetto matematico voluto: il problema del rapporto tra accessibilità all'informazione contenuta in una certa rappresentazione e l'apprendimento del concetto matematico alla base di tale rappresentazione, infatti, suscita interessanti riflessioni su aspetti di natura didattica rivolti a percorsi di apprendimento inclusivi a tutti i livelli di istruzione.

Il tema è complesso e ancora da esplorare, ma si tratta di un punto di partenza importante, a maggior ragione se si guarda a una particolare rappresentazione: il grafico di funzione. Il concetto di funzione è uno tra i più importanti della storia della matematica, ma anche uno dei più complessi, dove gli studenti (con o senza disabilità) incontrano molte difficoltà nel processo di apprendimento (Niss, 2020). L'insegnamento-apprendimento delle funzioni è profondamente intrecciato con la competenza di interpretare le informazioni contenute nei grafici o, viceversa, di utilizzare le informazioni disponibili rispetto a una funzione data per tracciarne il grafico. La letteratura sottolinea le difficoltà incontrate dagli studenti riguardo ai grafici delle funzioni e alla loro interpretazione, enfatizzando che il processo di costruzione di significato di questa rappresentazione è tutt'altro che banale per tutti gli studenti (e.g., Thompson & Carlson, 2017; Baccaglini-Frank et al., 2023).

## **Il Laboratorio Polin**

Il Laboratorio per la Ricerca e la Sperimentazione di Nuove Tecnologie Assistive per le STEM "S. Polin" ([www.integr-abile.unito.it](http://www.integr-abile.unito.it)) fa parte del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e opera nell'ambito della ricerca, sviluppo e sperimentazione di nuove metodologie didattiche e tecnologie assistive per lo studio delle discipline STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) e relativa divulgazione (e.g., Ahmetovic et al., 2020; Armano et al., 2022b; Armano et al., 2022c). L'obiettivo principale del Laboratorio è quello di trovare soluzioni inclusive alle problematiche sopra descritte.

## **Audiofunctions e altri strumenti**

Nell'ambito dell'accessibilità dei grafici di funzione, in collaborazione con l'Università degli Studi di Milano, il Laboratorio ha avviato il progetto Audiofunctions.web (Ahmetovic et al., 2019). L'idea è di utilizzare tecniche di *sonificazione* (Hermann et al., 2011) per permettere l'esplorazione di grafici anche a persone che non possono utilizzare efficacemente il medium visivo, siano esse persone non vedenti, ipovedenti o persone con DSA (disturbi specifici dell'apprendimento).

La sonificazione è una tecnica sinestetica che consente di trasformare e veicolare informazioni che per loro natura non sono sonore, sotto forma di stimoli uditivi; consente di percepire informazioni facendo leva sulle capacità che l'udito umano ha di distinguere le variazioni dei parametri del suono come l'ampiezza, la frequenza, la durata, il timbro e la direzione. La possibilità di sonificare grafici, che rappresentano dati complessi, aiuta coloro i quali devono leggerli ad interpretarli con maggiore successo e apre una nuova modalità esplorativa alle persone con disabilità visiva (per un approfondimento si veda Armano et al., 2022a). Oltre a Audiofunctions ci sono altri software che utilizzano tecniche di sonificazione per la rappresentazione di grafici, ad esempio SAS Graphics Accelerator (<https://support.sas.com/software/products/graphics-accelerator>) e Desmos (<https://www.desmos.com>). Audiofunctions.web (nella versione 1.0, attualmente disponibile gratuitamente online al link: <http://www.integr-abile.unito.it/audiofunctions.web/>) è un'applicazione web basata su sonificazione, icone sonore e sintesi vocale per l'esplorazione multimodale di grafici di funzioni. Le principali caratteristiche dell'applicazione sono:

- utilizzo tramite differenti interfacce quali tastiera, mouse e touchpad;
- utilizzo tramite tablet e dispositivi desktop tradizionali;
- indipendenza dal sistema operativo;
- uso simultaneo di presentazione visiva ed uditiva;

- accesso diretto ai grafici accessibili da documenti digitali e da pagine web tramite collegamento ipertestuale.

L'applicazione è stata ripetutamente oggetto di accurate fasi di test di computer science con l'ausilio di sperimentatori con disabilità visive (e.g., Bernareggi et al., 2016; Taibbi et al., 2014; Ahmetovic et al., 2019). Nel 2022, dopo un'altra fase di test più incentrata sulle ricadute didattiche, il Laboratorio Polin ha avviato lo sviluppo di una nuova versione del software per rivedere alcuni requisiti e la progettazione di parti del software, risolvere alcuni problemi tecnici e implementare nuove funzionalità. Le revisioni sono andate nella direzione di meglio integrare le esigenze didattiche con quelle informatiche, lavorando soprattutto sull'esperienza utente, sia dalla parte dello studente, sia da quella del docente. L'intenzione è quella di ottenere un software che possa essere il più possibile affine alle esigenze didattiche dell'insegnante e della classe.

Alla luce di questo è stata ripensata l'interfaccia utente, offrendo un'interfaccia completamente accessibile, con la possibilità di modificare e agire sui vari parametri della funzione. La nuova interfaccia permette l'interazione da una stessa pagina, contrariamente al funzionamento della prima versione in cui era necessario cambiare pagina per modificare la funzione o i parametri. Inoltre, la sonificazione è stata arricchita con l'implementazione di due modalità (discreta tramite chitarra e continua tramite clarinetto) e con suoni aggiuntivi (earcons – icone sonore) riprodotti durante l'esplorazione di alcuni elementi chiave della rappresentazione, quali l'uscita dall'area del grafico, che comprende anche momenti in cui la funzione è non visibile o non definita, l'intersezione con l'asse delle  $y$ , e quando  $f(x)$  assume valori negativi. Diversamente, nella versione 1.0, in tali punti vi era assenza di un riscontro sonoro, ma venivano verbalizzati le intersezioni con entrambi gli assi (il software dice "x" al momento di un'intersezione con l'asse  $x$ ), il passaggio per l'origine (dice "origin") e in presenza di punti di massimo e minimo (dice "max" e "min" rispettivamente). Anche per risolvere alcuni problemi tecnici di sincronizzazione tra velocità del parlato e velocità di esplorazione della funzione, è stato rivisto l'impiego di tali messaggi verbali, che nella versione 1.0 venivano riprodotti automaticamente. Tali verbalizzazioni, nella nuova versione, si possono attivare solamente se l'utente li richiede "on demand" (tramite specifici comandi da tastiera o dal pannello "Opzioni" – Figura 1).

La nuova versione del software Audiofunctions è stata sviluppata proprio per poter implementare l'uso del software anche dal punto di vista didattico, adottando tecnologie software più moderne in cui l'interazione ha un ruolo cruciale. L'obiettivo di questo articolo è, a partire da una basica presentazione della versione 2.0 del software Audiofunctions, proporre alla comunità una riflessione sui possibili utilizzi didattici. Più nello specifico verrà posta particolare attenzione alle due modalità di sonificazione discreta e continua, attualmente implementate in Audiofunctions 2.0, che permettono di veicolare un'esplorazione innovativa e multimodale del concetto di rapporto incrementale della funzione.



Figura 1a. Schermata principale di Audiofunctions 2.0 e bottone “Opzioni” (in rosso).

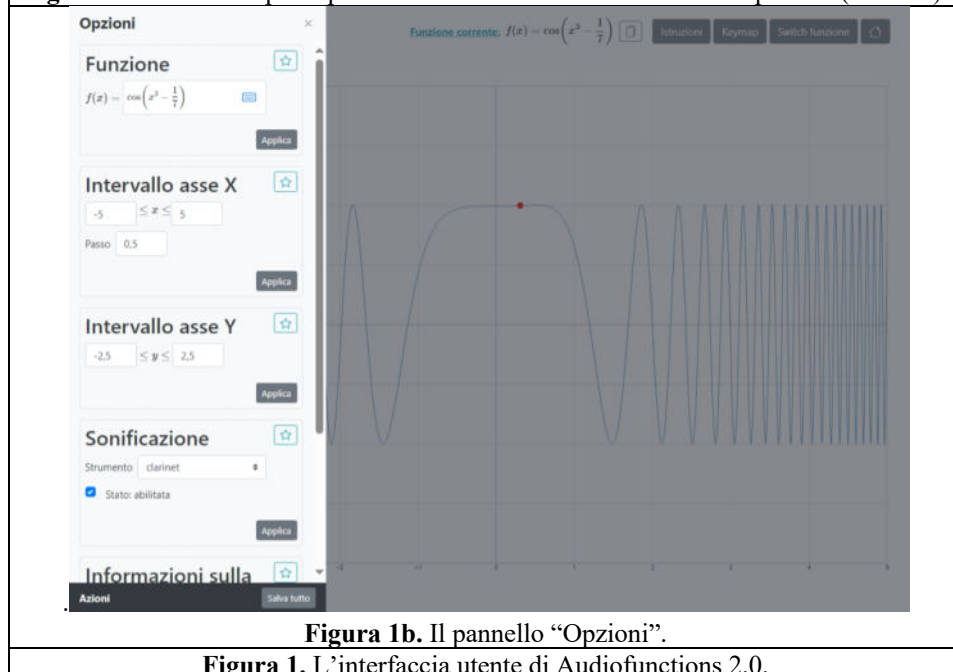


Figura 1b. Il pannello “Opzioni”.  
Figura 1. L’interfaccia utente di Audiofunctions 2.0.

## SONIFICAZIONE IN AUDIOFUNCTIONS 2.0

In questa sezione è illustrata la doppia modalità di sonificazione attualmente presente in Audiofunctions 2.0, ossia la sonificazione discreta e quella continua. Inoltre, a partire dalla presentazione dell’interfaccia utente e da una panoramica sulle modalità di interazione, sono qui brevemente presentate alcune delle nuove scelte implementative di Audiofunctions 2.0, illustrando le intenzionalità didattiche alla base delle modifiche realizzate rispetto alla prima versione di Audiofunctions.web.

### Interfaccia utente

Audiofunctions 2.0 è un’applicazione web progettata per consentire l’esplorazione di una funzione a valori reali in una variabile reale attraverso un’interfaccia utente multimodale (visiva e uditiva). L’interfaccia web è progettata secondo le linee guida per l’accessibilità dei contenuti web (WCAG 2.1,

<https://www.w3.org/TR/WCAG21/>). Ciò significa che gli elementi dell'interfaccia utente e le modalità di interazione sono accessibili sia tramite periferiche tradizionali (ad esempio, mouse e schermo) sia attraverso diverse tecnologie assistive (ad esempio, screen reader e display Braille).

L'utente attraverso l'interfaccia può esplorare la funzione a variabili reali inserita e compiere azioni all'interno della stessa pagina. Alcuni esempi di azioni sono cambiare l'intervallo visualizzato sugli assi delle ascisse e delle ordinate o cambiare la funzione stessa inserendola manualmente o scegliendola attraverso un bottone tra un set di funzioni predefinite. Questa interattività non era presente nella prima versione di Audiofunctions, nella quale era presente solo la parte esplorativa: la parte di configurazione era definibile a priori solo in una pagina diversa da quella nella quale si poteva esplorare la funzione.

### **Sonificazione**

La tecnica al cuore di Audiofunctions è la sonificazione, definita da Hermann et al. (2011) come “la tecnica di rendering del suono in risposta a dati e interazioni” (p. 1, nostra traduzione). Nel contesto di Audiofunctions la sonificazione mappa le informazioni relative alle funzioni su caratteristiche sonore. Più la sonificazione è semplice ed intuitiva, più aumenta il numero di informazioni che possono essere comunicate contemporaneamente ed efficacemente. Nell'intervallo di valori  $x$  e  $y$  del piano cartesiano visualizzato, Audiofunctions comunica il valore della funzione,  $y = f(x)$ , in relazione alla posizione attualizzata della  $x$  nell'intervallo di visualizzazione. Ciò può avvenire tramite uno strumento musicale scelto tra quelli disponibili: sinusoidale, clarinetto e chitarra, dei quali di seguito si descriveranno le caratteristiche e le differenze. L'intervallo spaziale  $x$  da sinistra a destra è mappato con la spazializzazione sonora, tecnicamente denominata *panning*, dove un suono relativo a una  $x$  visivamente più vicina al limite sinistro dell'area di visualizzazione del grafico viene percepito maggiormente dall'orecchio sinistro, mentre un valore di  $x$  più vicino all'estremo destro dell'area di visualizzazione del grafico della funzione è maggiormente percepito dall'orecchio destro. Il valore della funzione ( $y = f(x)$ ) è invece mappato sul *pitch*, cioè l'altezza del suono. L'altezza, in letteratura, è la caratteristica più efficace e utilizzata nel campo della sonificazione e il sistema uditivo umano è molto sensibile alle sue variazioni (Dubus & Bresin, 2013). La scelta del timbro dello strumento utilizzato per la sonificazione non è legata solo alla sonificazione, ma anche alla sua gradevolezza, sia soggettiva che in termini di qualità del suono. Questa scelta garantisce che gli studenti possano impegnarsi nell'esplorazione delle funzioni per una durata ragionevole, senza provare stanchezza a causa della natura del suono. Sebbene l'onda sinusoidale sia la più semplice e basilare non è acusticamente familiare all'orecchio umano. In Audiofunctions 2.0 sono disponibili tre timbri: l'onda sinusoidale (eredità della versione precedente, presto sarà abbandonata), un clarinetto e una chitarra acustica. Con clarinetto e chitarra individuamo due modalità di sonificazione: una “continua” e l'altra “discreta”, rispettivamente. Entrambe producono una variazione del pitch al variare del valore della funzione, la differenza sta nel modo in cui viene percepita la variazione.

**Nella sonificazione continua**, come suggerisce il termine, percettivamente si sente una variazione continua del pitch con un suono che da un pitch al successivo non ha una pausa. Considerato che in un contesto digitale il concetto di “continuo” non esiste, per implementare questa continuità abbiamo preso pitch il più vicini possibile tra loro in modo che il nostro orecchio potesse non percepire un salto tra due pitch successivi.

**Nella sonificazione discreta** sfruttiamo invece proprio il salto tra due pitch successivi, oltre al concetto di pausa, per cambiare la qualità del feedback sonoro. In merito al salto tra pitch, abbiamo scelto di considerare i soli pitch appartenenti alle note musicali della scala temperata e usarli per definire un numero di intervalli contigui, condensando un intervallo di valori della funzione sotto un unico pitch di riferimento. Il concetto di pausa in questo scenario si concretizza scegliendo di sonorizzare solo il passaggio di soglia da un intervallo a un altro, cioè da un pitch a un altro. Per un certo intervallo sull'asse

delle ascisse, infatti, non c'è suono (cioè una pausa) se l'altezza associata a quelle posizioni è la stessa dell'ultima sonificazione. Una rappresentazione visiva di questa tecnica è presentata in Figura 2.

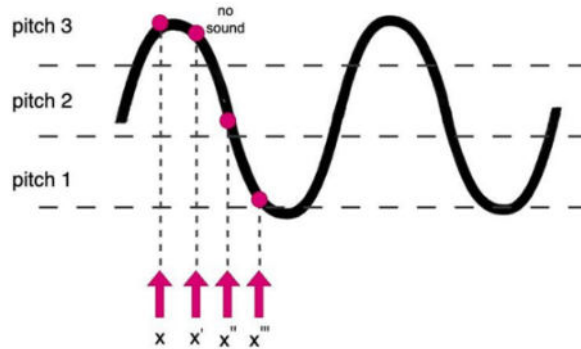


Figura 2. La sonificazione discreta.

Indichiamo  $x$  e  $x''$  come posizioni distinte sull'asse delle ascisse effettivamente sonificate consecutivamente da Audiofunctions, il *pitch 3* come la nota prodotta in corrispondenza di  $x$ , e il *pitch 2* come la nota prodotta in corrispondenza di  $x''$ . Tra la produzione del *pitch 3* e del *pitch 2* esiste una pausa. Questa pausa, in una certa misura, dipende da  $\Delta x = x'' - x$ , cioè dalla distanza tra  $x''$  e  $x$ .

Se ipotizziamo l'asse  $x$  suddiviso in un numero specifico di passi in cui il tempo da un passo all'altro è mantenuto costante (es. 5 secondi diviso il numero di passi), allora la pausa tra il *pitch 3* e il *pitch 2* è proporzionale al numero di passi che separano  $x$  e  $x''$ , in questo caso 2 passi.

### Modalità di interazione

L'utente può interagire con Audiofunctions principalmente attraverso mouse e tastiera. In questa sezione ci concentreremo sull'interazione col grafico della funzione, che può avvenire in tre modalità, come illustrate in Figura 3: non interattiva, mono-dimensionale, bi-dimensionale.

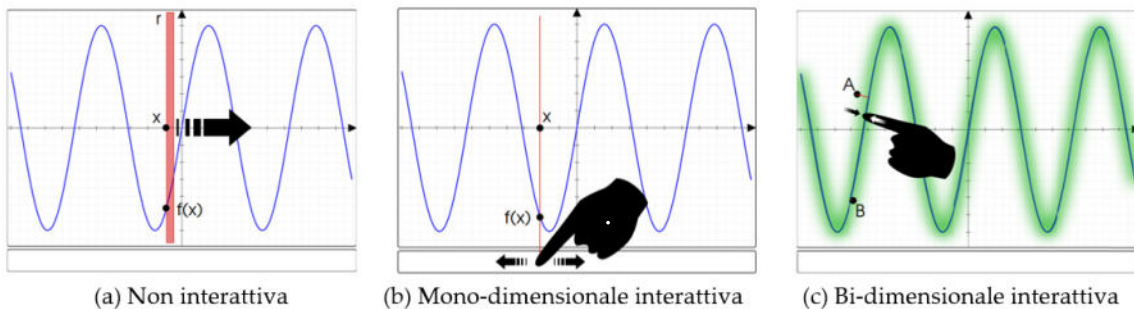


Figura 3. Le tre modalità di esplorazione di Audiofunctions (Taibbi et al., 2014, p. 542).

La modalità *non interattiva* (Fig. 3a) sonifica la funzione, ora implementata con il tasto "b" della tastiera, lungo l'asse delle ascisse da sinistra a destra, spostandosi di intervalli regolari in un tempo fissato (5 secondi). Ad ogni passo viene valutato il valore di  $x$  e il *pitch* sonificato è quello corrispondente al valore  $y=f(x)$ .

La modalità *mono-dimensionale* (Fig. 3b) è molto simile a quella non interattiva: funziona spostandosi lungo l'asse  $x$  e sonificando il *pitch* corrispondente a  $y=f(x)$ . Tuttavia l'esplorazione avviene manualmente, attraverso i tasti freccia destra/sinistra della tastiera: l'utente è così libero di esplorare la funzione con la velocità desiderata e sia da sinistra a destra che da destra a sinistra per intervalli scelti.

La modalità *bi-dimensionale* (Fig. 3c) permette di muoversi liberamente nel piano cartesiano. Questa modalità si può ottenere solo attraverso l'utilizzo del mouse e permette di sonificare anche punti esterni alla funzione muovendo il puntatore del mouse all'interno dell'area del grafico visualizzata.

## IL WORKSHOP

Durante il convegno DIFIMA 2023, presso uno dei laboratori informatici del Liceo Classico Statale "Massimo D'Azeglio" di Torino, è stato organizzato un workshop dedicato alla presentazione e al testing della nuova versione di Audiofunctions. La sessione ha registrato la partecipazione di oltre trenta insegnanti provenienti da scuole e gradi scolastici differenti, anche se in prevalenza di secondaria di secondo grado, con la partecipazione inoltre di alcuni docenti universitari.

La proposta iniziale è stata di una libera esplorazione del software, con l'uso di cuffie personali laddove queste fossero disponibili (questo è stato chiesto per permettere ai partecipanti di apprezzare il *panning* della sonificazione prodotta da Audiofunctions, ovvero l'effetto di spostamento dell'origine del suono lungo la direzione orizzontale, da sinistra a destra, a seconda della posizione dell'ascissa del punto mobile lungo l'asse  $x$ ). Dapprima i partecipanti hanno avuto la possibilità di esplorare la funzione  $f(x)=\sin(x)$  con sonificazione continua (clarinetto); successivamente sono stati invitati a modificare liberamente la funzione da sonificare dal pannello "Opzioni" e a passare dalla sonificazione continua a quella discreta (chitarra). Dati i tempi del laboratorio, la complessità e la novità del funzionamento di Audiofunctions, la maggior parte del tempo è stata dedicata a rispondere alle curiosità e ai dubbi sollevati dai partecipanti durante la loro interazione con il software. Riportiamo quindi le principali questioni emerse, soffermandoci in particolare sulle ricadute sul piano didattico.

Innanzitutto, possiamo osservare che sia stata effettivamente apprezzata una differenza significativa di fruizione del software con le cuffie rispetto alla modalità senza cuffie, cosa che ha appunto permesso ai partecipanti di toccare con mano l'effetto della spazializzazione del suono e di apprezzare la parte di informazione che deriva da questa caratteristica del suono. In particolare è stato significativo per alcuni partecipanti rendersi conto della differenza dell'ascolto in cuffia da soli rispetto all'ascolto condividendo lo stesso paio di cuffie con un collega, in quanto l'effetto della spazializzazione in questo secondo caso viene a mancare: il software, infatti, per rendere conto del *panning* sfrutta una differenza di produzione del suono sulla cuffia destra o sinistra.

Si è anche proposto ai partecipanti di lavorare a coppie, con un componente che si occupava di inserire una funzione a sua scelta nel software e l'altro che, a occhi chiusi e con le cuffie, doveva cercare di individuare quale funzione fosse (o potesse essere) sulla base della sonificazione restituita da Audiofunctions. L'andamento sinusoidale, per esempio, ad un primo ascolto della sonificazione continua è stato riconosciuto da molti partecipanti grazie all'andamento altalenante del suono, la verbalizzazione ricorrente nel laboratorio era "alti e bassi". Qualcuno si è poi spinto ad esplorare la sonificazione delle funzioni lineari e costanti. È stato osservato molto presto che l'ascolto rendeva possibile capire l'andamento generale della funzione, ma non permetteva di risalire esattamente alla forma algebrica della funzione rappresentata (per esempio, all'ascolto non era chiaro come poter distinguere tra  $f(x) = \sin(x)$  e  $f(x) = \sin(x) + 3$ ).

Un altro aspetto apprezzato del software è stato quello relativo alla possibilità di comporre funzioni direttamente in registro simbolico, grazie a una serie di simboli disponibili all'interno del software che possono essere attivati quando si va ad inserire la funzione voluta nella casella di testo corrispondente tramite una tastiera virtuale che compare a schermo su richiesta. Dal punto di vista didattico, questo ci fa pensare che tale funzionalità possa agevolare l'usabilità del software anche dal lato del docente e non solo lato utente – per esempio per la preparazione di consegne su funzioni specifiche.

L'aspetto emerso dalla discussione sul quale scegliamo di soffermarci maggiormente in questo contributo, e che riteniamo più significativo per il suo portato didattico, è tuttavia una riflessione che riguarda le potenzialità della sonificazione discreta per l'anticipazione del concetto di derivata. Come



descritto nel paragrafo precedente, nella modalità “chitarra”, Audiofunctions identifica diverse "strisce" orizzontali sul piano cartesiano, date da una suddivisione dell'intervallo dell'asse  $y$  visualizzato, corrispondente alla suddivisione delle altezze dei suoni in 37 intervalli; ogni intervallo corrisponde a una nota musicale di chitarra. Audiofunctions produce una nota solo quando  $f(x)$  cade in una "striscia" diversa da quella precedentemente sonificata. Ciò influisce sulla durata della pausa tra due note suonate successivamente (non necessariamente consecutive nella scala). La caratteristica del comportamento della funzione che si può dedurre da questo tipo di sonificazione dipende dalla durata della pausa tra due diverse note sonificate successivamente: nell'intervallo considerato la funzione sarà tanto più ripida quanto Audiofunctions sonifica in modo molto ravvicinato due note molto distanti tra loro sulla scala. Se consideriamo, in particolare, le esplorazioni di grafici di funzioni in cui il software fa scorrere l'intero grafico da sinistra a destra (cioè nella modalità non interattiva o nella modalità interattiva monodimensionale, si vedano Fig. 3a e 3b rispettivamente), possiamo assumere che il tempo di transizione da un passo all'altro sia costante, a meno che non si zoommi o si cambi la dimensione del passo. Consideriamo quindi due punti del grafico  $(x_n, f(x_n))$  e  $(x_m, f(x_m))$  sonificati successivamente, dove  $x_i$  è la posizione sull'asse  $x$  relativa all' $i$ -esimo passo, dove  $i = 0, 1, \dots$  e  $n < m$ . La sonificazione discreta tra questi due punti rappresenta, a livello uditivo, l'idea di pendenza della retta che li collega. Infatti, tra  $x_n$  e  $x_m$  ci sono  $m-n$  passi, per cui il tempo per passare da  $x_n$  a  $x_m$  è direttamente proporzionale a  $m-n$ . Poiché  $(x_n, f(x_n))$  e  $(x_m, f(x_m))$  sono sonificati in successione, la pendenza della retta che passa tra i due punti a livello uditivo viene “tradotta” come “rapidità” di passaggio tra due suoni diversi, cioè:

- se la sonificazione sentita in  $x_n$  e quella in  $x_m$  sono separate da una pausa "lunga", significa che la funzione aumenta tanto più “lentamente” quanto minore è il numero di "strisce" comprese tra quelle in cui si trovano i punti  $(x_n, f(x_n))$  e  $(x_m, f(x_m))$ . Infatti, questo significa che i due punti sonificati appartengono a strisce non troppo distanti tra loro (quindi non ci si è spostati “molto” lungo l'asse  $y$ ), ma sono necessari molti passi per passare da una striscia all'altra (quindi ci si è spostati “molto” lungo l'asse  $x$ );
- se  $x_n$  e  $x_m$  sono associati a passi consecutivi, cioè quando  $m=n+1$ , questo significa che nel giro di un solo passo la funzione passa da una striscia ad un'altra, quindi aumenta tanto più rapidamente quanto più i due suoni restituiti sono distanti.

Da quanto abbiamo descritto fin qui, si potrà osservare che questo tipo di sonificazione non permette di cogliere i dettagli del comportamento della funzione tra due “strisce” consecutive. L'interazione musicale tra pause e note riprodotte crea a livello sonoro un senso percettivo di "completamento" del grafico attraverso segmenti che collegano queste note – cioè restituisce la possibilità di approssimare la funzione in input con una linea spezzata interpolante i punti sonificati. Tuttavia, attraverso lo zoom-in o zoom-out, è possibile ridefinire l'intervallo di visualizzazione dell'asse  $y$  su cui viene calcolata la suddivisione delle altezze dei suoni, cosa che permette di apprezzare una sonificazione più fine o più grossolana della funzione. In generale, quindi, la sonificazione discreta non solo offre informazioni "macro" sul comportamento complessivo della funzione all'interno della porzione di piano cartesiano considerata, ma facilita anche la rappresentazione sonora e, di conseguenza, sensoriale del concetto di rapporto incrementale. Questo fenomeno può essere attribuito ai principi descritti dalla teoria della Gestalt a livello visivo (si veda per esempio Kanizsa, 1987), generando un approccio spontaneo e *embodied* al concetto di derivata.

## CONCLUSIONI

Il workshop aveva l'obiettivo di far conoscere la nuova versione di Audiofunctions e di raccogliere dai docenti i loro primi feedback circa l'interesse e la fruibilità del software. Date le osservazioni sollevate da parte dei partecipanti, possiamo dire di aver riscontrato un certo interesse per il software e per le sue potenzialità didattiche, confermando anche una certa fruibilità percepita dai docenti. Sono sorte delle considerazioni sul fatto di considerarlo uno strumento didattico per lavorare in una prospettiva

qualitativa piuttosto che quantitativa sul concetto di funzione – cosa che probabilmente per alcuni docenti può essere risultata un po' inedita rispetto ad altri approcci didattici a questo concetto (questo in parte può dipendere dal fatto che il canale uditivo si presta per veicolare alcune informazioni sul comportamento della funzione ma non tutte). Questo accento sull'uso del software in ottica qualitativa dal nostro punto di vista si collega con la potenzialità di Audiofunctions di rappresentare a livello sonoro la funzione come covariazione della variabile indipendente e di quella dipendente. In particolare, è risultata interessante la sonificazione discreta come mezzo uditivo per anticipare a livello di percezione sonora il concetto di derivata e di rapporto incrementale.

Quanto rilevato fin qui costituisce un incoraggiante primo passo verso indagini più strutturate che consentono di mettere più pienamente a fuoco le potenzialità didattiche di Audiofunctions per l'apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria (di primo e di secondo grado) e non solo in contesto universitario. Ulteriori studi potranno chiarire quali possano essere delle possibili implementazioni a livello didattico per rendere Audiofunctions non solo uno strumento per l'accessibilità ai grafici di funzione presenti nei testi, ma anche uno strumento per realizzare attività didattiche volte all'apprendimento del concetto di funzione in chiave inclusiva. In questa direzione, ricercatori del Laboratorio "S. Polin" e collaboratori stanno continuando a indagare il funzionamento del software, studiando come soggetti già esperti nell'ambito delle funzioni possano interfacciarsi con esso.

## RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato sostenuto dal GNSAGA dell'INDAM.

## BIBLIOGRAFIA

- Ahmetovic, D., Bernareggi, C., Guerreiro, J., Mascetti, S., & Capietto, A. (2019). Audiofunctions.web: Multimodal exploration of mathematical function graphs. In *Proceedings of the 16th International Web for All Conference* (pp. 1–10). <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3315002.3317560>
- Ahmetovic, D., Armano, T., Bernareggi, C., & Capietto, A. (2020). Utilizzare grafici di funzione accessibili nelle attività di Moodle con AudioFunctions.web. In G. Fiorentino, & S. Rabellino (Eds.), *Atti del MoodleMoot Italia 2019* (pp. 65–70). MediaTouch 2000.
- Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022a). Grafici sonori. Multicanalità e Inclusività nella Didattica delle STEM. [Sonified Graphs. Multichannel and Inclusiveness in STEM Education.] In R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza. DI.FI.MA. 2021* (pp. 527–532). Collane@unito.it. <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>
- Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022b). Produzione di documenti digitali accessibili con contenuto scientifico: strumenti inclusivi. In R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza. DI.FI.MA. 2021* (pp. 498–504). Collane@unito.it. <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>
- Armano, T., Manolino, C., Piroi, M., Borsero, M., Maietta, D. & Capietto, A. (2022c). LaTeX tra competenze digitali e accessibilità: un'esperienza di PCTO con il Laboratorio Polin. [LaTeX between digital skills and accessibility: A PCTO experience with the Polin Laboratory]. *Mondo Digitale*, 20(97). <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-85147830970&partnerID=MN8TOARS>
- Baccaglioni-Frank, A., Antonini, S., & Lisarelli, G. (2023). Exploiting the potential of dynamic asymmetry in dragging to foster students' understanding of functions and their Cartesian graphs. *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1–28). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6\\_14-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_14-1)
- Borsero, M., Murru, N., & Ruighi, A. (2014). Il LATEX come soluzione al problema dell'accesso a testi con formule da parte di disabili visivi. *ArsTEXnica*, 22, 12–18.
- Dubus, G., & Bresin, R. (2013). A Systematic Review of Mapping Strategies for the Sonification of Physical Quantities. *PLOS ONE*, 8(12), e82491. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0082491>

- Hermann, T., Hunt, A., & Neuhoff, J. G. (Eds.) (2011). *The Sonification Handbook*. Logos Verlag Berlin. <https://sonification.de/handbook/>
- Howell, J., Chan, A., Hordemann, G., & Quek, F. (2022). Helping Those with Visual Impairments Read Mathematics: A Spatial Approach. In *PETRA '22: Proceedings of the 15th International Conference on Pervasive Technologies Related to Assistive Environments* (pp. 286–293). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3529190.3529193>
- Kanizsa, G. (1987). Quasi-Perceptual Margins in Homogeneously Stimulated Fields. In S. Petry, & G.E. Meyer (Eds), *The Perception of Illusory Contours* (pp. 40–49). Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4760-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4760-9_4) [Translation of Kanizsa, G. (1955). Margini quasi-percettivi in campi con stimolazione omogenea. *Rivista di Psicologia*, 49, 7–30. Giunti-Barbéra.]
- Legge 5 febbraio 1992, n. 104, “Legge-quadro per l’assistenza, l’integrazione sociale e i diritti delle persone handicappate”. (1992, 17 febbraio) (Italia). – Suppl. Ordinario n. 30. *Gazzetta Ufficiale*, (39). <https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/1992/02/17/39/so/30/sg/pdf>
- Moon, N. W., Todd, R. L., Morton, D. L., & Ivey, E. (2012). *Accommodating Students with Disabilities in Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM)*. Center for Assistive Technology and Environmental.
- Niss, M. (2020). Functions learning and teaching. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 303–306). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_96](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_96)
- Piroi, M., Manolino, C., Armano, T., Taranto, E., & Capietto, A. (2023). Teacher Professional Development via a MOOC on Assistive Technology for Visually Impaired Students Learning Mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 16(1), 59–78. <https://doi.org/10.26711/007577152790164>
- Taibbi, M., Bernareggi, C., Gerino, A., Ahmetovic, D., Mascetti, S. (2014). AudioFunctions: Eyes-Free Exploration of Mathematical Functions on Tablets. In K. Miesenberger, D. Fels, D. Archambault, P. Peñáz, W. Zagler (Eds.), *Computers Helping People with 1279 Special Needs. ICCHP 2014. Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 8547, pp. 537–544). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-08596-8\\_84](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08596-8_84)
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.