

L'asset allocation strategica: ottimizzazione media-varianza e successivi affinamenti

di Maria Debora Braga

Sommario del capitolo

- 4.1 L'asset allocation strategica secondo la mean-variance optimization di Markowitz
- 4.2 I presupposti della mean-variance optimization
- 4.3 L'estimation risk e i problemi pratici della mean-variance optimization
- 4.4 Un esempio di applicazione dell'approccio di Markowitz
- 4.5 L'asset allocation strategica e la gestione dell'estimation risk: una descrizione introduttiva
- 4.6 Il metodo degli additional weight constraint
- 4.7 Il metodo del resampling
- 4.8 L'asset allocation strategica bayesiana: il modello di Black-Litterman
- 4.9 La verifica out of sample per mettere alla prova le strategie di investimento

4.1 L'asset allocation strategica secondo la mean-variance optimization di Markowitz

Un passo fondamentale nella direzione di un approccio disciplinato e quantitativo alla “questione” dell'*asset allocation* strategica è stato compiuto da Harry Markowitz nel suo articolo “Portfolio Selection”, pubblicato nel 1952 sul *Journal of Finance*. Le idee espresse in quel contributo hanno finito per configurare una teoria normativa che descrive uno standard di comportamento a cui attenersi nella costruzione dei portafogli. Esse, in particolare, hanno costituito le basi di ciò che, in seguito, è stato comunemente citato come *Modern Portfolio Theory*, *Mean-Variance Analysis*, *Mean-Variance Optimization*.¹

Oltre al merito di aver proposto un *framework* (di cui poi si effettuerà un'analisi approfondita) per la *portfolio construction*, a Markowitz devono attribuirsi due ulteriori riconoscimenti: la traduzione in termini tecnici e formali del concetto di diversificazione e la rappresentazione dell'investitore come soggetto che assume decisioni in uno spazio bidimensionale.

Con riguardo al primo, si rammenta che Markowitz quantifica il concetto di diversificazione mediante la nozione statistica di covarianza/correlazione fra *asset class* e, conseguentemente, provvede alla determinazione della varianza di portafoglio non solo sulla base della rischiosità *stand-alone* delle *asset class* (e dei loro pesi), bensì anche sulla base dell'interazione di un'*asset class* con ciascuna delle altre *asset class*. In tal modo, l'autore fornisce una giustificazione più solida ed elegante per spostare il *focus* dalla selezione della singola *asset class* al portafoglio rispetto al classico adagio “non mettere tutte le uova nello stesso paniere”. A completamento di quanto appena detto, sono particolarmente interessanti le parole con le quali Markowitz attesta che il concetto di diversificazione non è riconducibile esclusivamente a una questione numerica: «Not only does the E-V [expected return-variance] hypothesis imply diversification, it implies the 'right kind' of diversification for the 'right reason'. The adequacy of diversification is not thought by investors to depend solely on the number of different securities held [...]».²

¹ Una esposizione in forma più estesa e dettagliata del contributo di Markowitz al tema della *portfolio construction* è rintracciabile nel volume pubblicato dallo stesso autore qualche anno più tardi. Si veda, infatti, Markowitz (1959).

² Markowitz (1952), pag. 89.

Con riguardo al secondo merito, si ricorda che Markowitz, a differenza della gran parte della letteratura che lo aveva preceduto, respinge un profilo di investitore esclusivamente orientato alla massimizzazione del rendimento atteso, per avanzarne uno proprio: quello di un investitore che avverte come “cosa desiderabile” il rendimento atteso e, come “cosa non desiderabile”, la varianza (deviazione standard) dei rendimenti.³ Da questa rappresentazione delle preferenze dell'investitore trae origine il criterio decisionale noto come principio media-varianza. In base a esso, dati due portafogli A e B, con rendimento atteso μ_A e μ_B e rischio atteso σ_A e σ_B , è corretto affermare che A domina (è indubbiamente preferibile a) B se:

$$\mu_A \geq \mu_B \text{ e } \sigma_A \leq \sigma_B$$

con almeno una disuguaglianza forte verificata. Anche se si può argomentare che la quantificazione del rischio come dispersione dalla media e la sua interpretazione in termini di incertezza non siano le sole ammissibili, l'introduzione da parte di Markowitz del *trade-off* tra rendimento e rischio come criterio di scelta rimane meritevole di apprezzamento.

Alla luce di quanto premesso, prima di addentrarsi nell'approccio di Markowitz all'*asset allocation* è bene fornire una formulazione matematica dei parametri descrittivi delle caratteristiche di un portafoglio di N *asset class* rischiose (con $N \geq 3$). Per ragioni di completezza, si farà ricorso sia all'algebra classica sia all'algebra matriciale.

La composizione del portafoglio è data dal vettore \mathbf{w} di dimensione $N \times 1$, nell'ambito del quale w_i esprime la percentuale dell'*asset class* i -esima detenuta in portafoglio:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ \dots \\ w_i \\ \dots \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Si ha inoltre che:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \text{ o, in modo equivalente, } \mathbf{w}'\mathbf{e} = 1 \text{ con } \mathbf{e}' = [1, 1, \dots, 1].$$

Le proprietà attinenti al rendimento atteso e al rischio delle singole *asset class* sono riassunte, rispettivamente, nei vettori $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, entrambi di dimensione $N \times 1$, di seguito rappresentati:

³ Nel suo contributo fondamentale del 1952, Markowitz ricorre alla varianza come misura di rischio; nella prassi e nella letteratura successiva è però prevalso il ricorso alla deviazione standard. Poiché $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$, l'uso dell'una o dell'altra misura è del tutto indifferente. Lo stesso Markowitz, a tale proposito, in un lavoro successivo scrive: «[...] although the article noted that the same portfolios that minimize standard deviation for given E [expected return] also minimize variance for given E [expected return], it failed to point out that standard deviation (rather than variance) is the intuitively meaningful measure of dispersion», Markowitz (1999), pag. 6.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_i \\ \dots \\ \dots \\ \mu_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_i \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_N \end{bmatrix}$$

La matrice di correlazione \mathbf{C} e la matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$, entrambe di dimensione $N \times N$, riportano, invece, le informazioni riguardanti l'interazione o il legame tra le possibili coppie di *asset class*. Esso può essere genericamente indicato, nel caso della correlazione, con il simbolo ρ_{ij} e, nel caso della covarianza, con il simbolo σ_{ij} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \dots & \rho_{1i} & \dots & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \dots & \rho_{2i} & \dots & \dots & \rho_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{i1} & \rho_{i2} & \dots & \dots & \rho_{ii} & \dots & \dots & \rho_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & \dots & \rho_{Ni} & \dots & \dots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \dots & \sigma_{1i} & \dots & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \dots & \sigma_{2i} & \dots & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \dots & \sigma_{ii} & \dots & \dots & \sigma_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \dots & \sigma_{Ni} & \dots & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

I termini ρ_{ii} e σ_{ii} presenti sulla diagonale principale della matrice \mathbf{C} e $\boldsymbol{\Sigma}$ denotano, rispettivamente, la correlazione e la covarianza di un'*asset class* con se stessa; pertanto essi corrispondono rispettivamente a un valore pari a 1 e a σ_i^2 . Un generico termine σ_{ij} collocato, naturalmente, al di fuori della diagonale principale della matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ è invece equivalente all'espressione $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. È poi facile osservare che entrambe le matrici sono perfettamente simmetriche rispetto alla propria diagonale principale. Data questa circostanza, nonché il fatto che le grandezze sulla diagonale principale riguardano una singola *asset class*, è possibile conteggiare i termini unici, non ridondanti, attinenti al legame tra due *asset class* differenti presenti nelle matrici \mathbf{C} e $\boldsymbol{\Sigma}$ mediante l'espressione $[N \cdot (N - 1)]/2$.

Utilizzando le grandezze e le notazioni introdotte, il rendimento atteso di portafoglio μ_p può essere calcolato, indifferentemente, secondo la (4.1a) o la (4.1b):

$$\mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \quad (4.1a)$$

$$\mu_p = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \quad (4.1b)$$

Il rischio di portafoglio, qui espresso come varianza σ_p^2 , è, invece, ottenuto dall'applicazione della (4.2a) o della (4.2b):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad \text{o ancora,} \quad \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (4.2a)$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (4.2b)$$

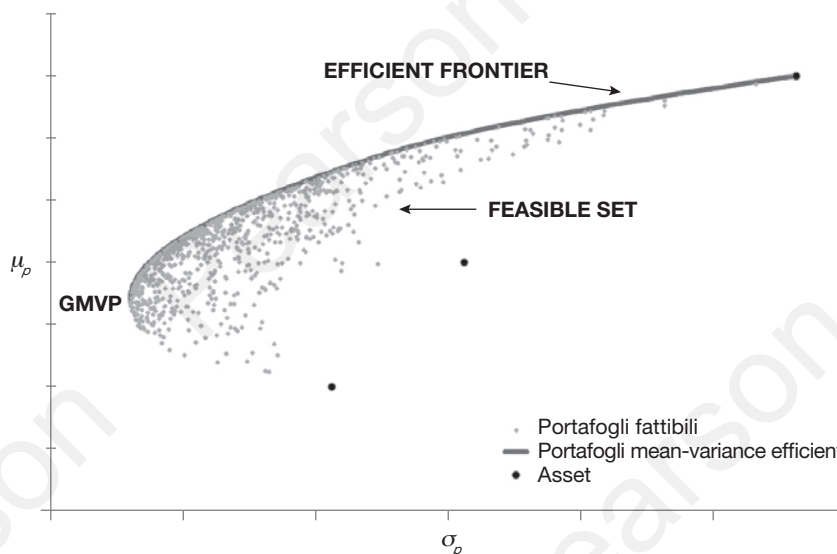
L'esame dell'approccio di Markowitz alla "questione" dell'*asset allocation* strategica può ora avere luogo. A tal fine, come punto di partenza occorre prendere in considerazione un investitore razionale che, all'inizio di un periodo, decide quale portafoglio detenere fino al termine di quel periodo (cioè il suo orizzonte temporale), senza possibilità di modificarne la composizione nel durante di fronte a guadagni o perdite intermedie e senza alcuna attenzione per il "dopo". Si tratta, dunque, di un investitore caratterizzato da un cosiddetto *myopic behavior*, il quale agisce in un contesto uniperiodale nell'intento di massimizzare la propria utilità attesa.

Secondo Markowitz, un siffatto investitore sceglierebbe, nel *set* dei portafogli fattibili (cosiddetto *feasible set* o, semplicemente, *feasible portfolio*), per ogni livello di rendimento atteso, il portafoglio con la minima varianza (e quindi minima deviazione standard). I portafogli corrispondenti a questa descrizione possono definirsi *mean-variance efficient portfolio*. Il *set* dei portafogli *mean-variance efficient*, rappresentato nello spazio rischio-rendimento, identifica la cosiddetta frontiera efficiente (o *Markowitz's efficient frontier*). Quest'ultima, sostanzialmente, dà evidenza del miglior *trade-off* possibile tra rendimento atteso e rischio, per ciascun livello di rendimento atteso oppure per ciascun livello di rischio; i portafogli al di sotto della frontiera efficiente possono definirsi, indifferentemente, portafogli inefficienti o dominati; i portafogli al di sopra della frontiera efficiente sono, invece, portafogli non fattibili; infine, il portafoglio della frontiera efficiente con la più piccola varianza possibile è detto *global minimum variance portfolio* (GMVP) o portafoglio a varianza minima.

Per agevolare il riscontro dei concetti e dei termini testé utilizzati, si propone, con l'ausilio della Figura 4.1, un esempio costruito partendo dalla considerazione di tre *asset class* correlate positivamente in modo non perfetto, di cui è specificato il posizionamento per rischio e rendimento atteso. Con esse, si è costruito un numero (1.000) piuttosto significativo di portafogli fattibili in grado di fornire un'idea approssimativa della regione rappresentativa del *feasible set*. Nella stessa Figura 4.1, con il tracciato della frontiera efficiente, sono poi stati evidenziati i portafogli che espongono al minor livello possibile di deviazione standard per ciascun livello di rendimento atteso o, equivalentemente, i portafogli che massimizzano il rendimento atteso per ciascun livello di rischio.

I passaggi precedenti hanno chiarito la logica secondo la quale l'investitore di Markowitz dovrebbe affrontare le *investment decision*. Ai fini di una analoga chiarezza circa il

Figura 4.1 Feasible set e frontiera efficiente di Markowitz.



modo di procedere sul piano pratico, è opportuno sottolineare che la concreta identificazione dei *mean-variance efficient portfolio* non passa attraverso la preliminare individuazione dei *feasible portfolio* (di fatto innumerevoli), ma consegue dall'applicazione immediata di un algoritmo appositamente formulato da Markowitz per affrontare un problema di ottimizzazione media-varianza (cosiddetto *Mean-Variance Optimization problem*).

In generale, un problema/algoritmo di ottimizzazione consta di tre componenti basilari:

- una funzione obiettivo, cioè un'espressione matematica di ciò che si desidera ottimizzare (vale a dire minimizzare oppure massimizzare);
- un *set* di variabili decisionali (per definizione, inizialmente non specificamente conosciute), dalle quali dipende il valore dell'espressione matematica da ottimizzare;
- un *set* di vincoli, cioè di restrizioni, da applicarsi al *set* di variabili decisionali o ad alcune di esse nella forma di vincolo di eguaglianza (*equality constraint*) e/o vincolo di disequaglianza (*inequality constraint*).

Le tre componenti descritte sono perfettamente riconoscibili nella classica formulazione della *Mean-Variance Optimization* (MVO). Infatti, quest'ultima si propone di pervenire alla decisione circa i pesi da assegnare alle *asset class* con l'obiettivo di minimizzare il rischio (varianza o deviazione standard) del portafoglio nel rispetto di un dato valore di rendimento atteso del portafoglio (μ_p^*) e assicurando che ciascun peso sia non negativo e che la somma dei pesi sia pari a 1 (ossia 100%). In termini algebrici, di conseguenza, la *Mean-Variance Optimization* risulta, alternativamente, così scritta (4.3):⁴

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (4.3a)$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i &= \mu_p^* \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min_w \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad (4.3b)$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} &= \mu_p^* \\ \mathbf{w}' \mathbf{e} &= 1 \\ [\mathbf{w}] &\geq 0 \end{aligned}$$

Com'è immediato notare, nella formulazione della *Mean-Variance Optimization* si riscontra la presenza, nel ruolo di restrizioni poste ai pesi di portafoglio, di un vincolo di eguaglianza, se si fa riferimento alla condizione che la loro somma sia 1 (si tratta del cosiddetto *budget*

⁴ Per estrema completezza, si osserva che nell'ambito della (4.3a) e della (4.3b) la funzione obiettivo è ancora proposta in termini di varianza di portafoglio da minimizzare. Va da sé che considerandone la radice quadrata, si ragiona in termini di deviazione standard. Ciò che ancor più merita di essere sottolineato è che, qualunque sia il percorso scelto, l'*output* dell'ottimizzazione à la Markowitz non subisce alterazioni. Si veda anche la precedente nota 3.

constraint o *full investment constraint*), e di vincoli di disuguaglianza, se si fa riferimento al fatto che sia impedito lo *short selling* di qualunque *asset class* (è il cosiddetto *non-negativity constraint* o *long only constraint*). La presenza di questa seconda tipologia di vincoli preclude la risoluzione del problema di *Mean-Variance Optimization* per via analitica e, a tal fine, impone l'uso di tecniche numeriche contraddistinte da una natura iterativa.⁵ Per una corretta classificazione della *Mean-Variance Optimization* è utile segnalare che essa configura un problema di Programmazione Quadratica (PQ), in quanto si propone di minimizzare una funzione quadratica nel rispetto di vincoli lineari (come già detto, di eguaglianza e di disuguaglianza). Questa qualificazione rimane inalterata se, anziché adottare l'originaria *risk minimization formulation* dell' algoritmo di ottimizzazione, si fa uso di sue formulazioni alternative. Una di queste è la cosiddetta *expected return maximization formulation*. Come posto in evidenza, indifferentemente, dalla (4.4a) e dalla (4.4b), essa prevede che il problema di ottimizzazione sia affrontato con l'iniziale scelta di un livello *target* di rischio (σ_p^*) e con la successiva ricerca dei pesi per le *asset class* in grado di massimizzare, nel rispetto dei classici vincoli che li riguardano, il rendimento atteso del portafoglio:

$$\max_w \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \tag{4.4a}$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} &= \sigma_p^{2*} \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max_w \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \tag{4.4b}$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} &= \sigma_p^{2*} \\ \mathbf{w}' \mathbf{e} &= 1 \\ [\mathbf{w}] &\geq 0 \end{aligned}$$

L'ulteriore possibile alternativa di esplicitazione del problema di ottimizzazione *à la Markowitz* è denominata *risk aversion formulation*. La (4.5) mostra che, in questo caso, la funzione obiettivo corrisponde a una funzione di utilità da massimizzare, sempre nel rispetto di restrizioni ai pesi:

$$\max_w \left(\mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \right) \tag{4.5}$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \mathbf{e} &= 1 \\ [\mathbf{w}] &\geq 0 \end{aligned}$$

Il parametro λ rappresenta il coefficiente di avversione al rischio (detto anche *Arrow-Pratt risk aversion index*) e determina l'entità della penalizzazione inferta al rischio di portafoglio.

⁵ In altri termini, le tecniche di ottimizzazione numerica operano attraverso la generazione di una sequenza di soluzioni approssimate che via via si avvicinano maggiormente, ovvero convergono verso la vera soluzione. Poiché quest'ultima non è nota e i tentativi non possono procedere all'infinito, tali tecniche numeriche adottano un *termination criterion* o *convergence criterion* soddisfacente il quale il processo iterativo viene interrotto.

glio, il quale è inversamente collegato all'utilità attesa. Se λ è piccolo, il rischio di portafoglio è pesato in modo esiguo e ciò consente di identificare un portafoglio ottimo aggressivo; all'opposto, se λ è alto, l'elevata ponderazione della varianza porta a individuare un portafoglio ottimo più cauto.

Le tre formulazioni presentate per il problema di *Mean-Variance Optimization* sono equivalenti, nel senso che conducono alla stessa frontiera efficiente avendo in comune la ricerca del miglior *trade-off* tra rendimento atteso e varianza di portafoglio. La derivazione dei portafogli *mean-variance efficient* è conseguente alla variazione nelle tre fattispecie illustrate, rispettivamente, del livello *target* di rendimento atteso, del livello *target* di rischio supportabile e, infine, del coefficiente di avversione al rischio.⁶

4.2 I presupposti della mean-variance optimization

Il ricorso alla *Mean-Variance Optimization* di Markowitz, quale criterio e tecnica per affrontare il problema della costruzione dei portafogli strategici, presuppone (da parte dell'utente) la consapevolezza delle ipotesi semplificatrici sulle quali essa si regge e, naturalmente, la disponibilità al loro accoglimento. Le assunzioni cui si fa riferimento riguardano il comportamento delle serie degli *asset class return* e l'assetto delle preferenze dell'investitore o, più in generale, la sua logica decisionale. In dettaglio, la *Mean-Variance Optimization* ipotizza che:

- i rendimenti delle *asset class* si distribuiscano normalmente, ovvero che siano conformi alla "curva a campana" (cioè alla distribuzione gaussiana); per essere ancora più precisi, si presume che essi siano *jointly normal* e, quindi, che seguano una distribuzione normale multivariata;
- gli investitori esibiscano una funzione di utilità quadratica;
- gli investitori siano caratterizzati da un orizzonte temporale di investimento uniperiodale.

Per ciascuna di queste ipotesi si rende opportuno qualche approfondimento nonché qualche considerazione circa le probabili ripercussioni di una loro rimozione, visto che non si intende negare la circostanza che esse possano discostarsi dalla realtà dei fatti.

Com'è noto, l'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti delle *asset class* consente una descrizione esaustiva del loro comportamento con la sola stima dei primi due momenti statistici, vale a dire il rendimento atteso e la varianza (deviazione standard) o, in caso di normalità congiunta, la matrice di covarianza quale espressione dei co-momenti rilevanti.

⁶ La derivazione del *global minimum variance portfolio* è la sola che non impone di considerare i rendimenti μ_i poiché in tal caso il vettore dei pesi è totalmente dipendente dalla matrice di covarianza. In presenza di *budget constraint* e di *long-only constraint*, la sua composizione è infatti ottenuta risolvendo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_w \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}$$

sotto i vincoli:

$$\mathbf{w}'\mathbf{e} = 1$$

$$[\mathbf{w}] \geq 0$$

Per completezza (anche se non di particolare rilievo per una normale attività di *asset allocation*), va detto che in ipotesi di rimozione del *long-only constraint*, il problema ammetterebbe il calcolo diretto della soluzione nel modo seguente:

$$\mathbf{w}_{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'\Sigma^{-1}\mathbf{e}}$$

L'assunzione di tale forma distributiva, diversamente da quanto accadrebbe con il ricorso a distribuzioni non normali, consente una agevole aggregazione dei rischi *across asset* e *over time*.⁷ Tuttavia, diversi studiosi hanno fornito evidenze empiriche che suggeriscono il suo rigetto.

Una prima forma di deviazione dalla normalità, ovvero l'asimmetria dei rendimenti, è documentata, per esempio, nei contributi di Simkowitz e Beedles, Kon, Singleton e Wingender, Peirò, Prakash *et al.* e Jondeau e Rockinger.⁸ Questa caratteristica è catturata attraverso una misura nota come coefficiente di asimmetria (*skewness*), anche detta “terzo momento centrale”.⁹ In questi casi, la funzione di densità rappresentativa della distribuzione dei rendimenti non mostra un'equa e speculare dispersione delle realizzazioni a sinistra e a destra del valore atteso (come accade con la gaussiana contraddistinta da una *skewness* nulla) e, dunque, neppure la coincidenza tra valore medio e mediana dei rendimenti, bensì un allungamento della “coda” di destra (asimmetria o *skewness* positiva) o un prolungamento di quella di sinistra (asimmetria o *skewness* negativa).

Una seconda forma di violazione della distribuzione normale è ravvisabile nell'occorrenza di rendimenti estremi con una frequenza ben superiore rispetto a quella da essa contemplata. Una conferma in tal senso è fornita, per esempio, dai lavori di Fama, Jansen e Devries e Longin.¹⁰ In pratica, la reale distribuzione dei rendimenti appare con code spesse (*fat tailed*), ovvero contraddistinta da una presenza, superiore alle attese, di valori (ritenuti *outlier*, il che determina un aumento dello spessore delle “code” della distribuzione e, contestualmente, una riduzione delle frequenze dei valori tra il centro e le “code” stesse. Questo connotato della distribuzione degli *asset return* può essere colto attraverso il parametro di curtosi (*kurtosis*), anche detto “quarto momento centrale”.¹¹ Considerato che, in una gaussiana, la *kurtosis* assume valore 3, alla fattispecie delle *fat tails* si associa un valore di *kurtosis* superiore a 3 e la qualificazione della distribuzione come leptocurtica.^{12, 13}

La seconda ipotesi stringente attribuibile al modello di Markowitz, come anticipato, concerne la “regola” secondo la quale l'investitore assegna un valore del proprio grado di soddisfazione alle possibili scelte che ha di fronte rappresentate, nel contesto in esame,

⁷ Si ricorda, infatti, che, in tal caso, l'aggregazione dei rischi *over time* avviene utilizzando la cosiddetta *square-root-of-time rule*.

⁸ Simkowitz e Beedles (1980); Kon (1984); Singleton e Wingender (1986); Peirò (1999); Prakash *et al.* (2003); Jondeau e Rockinger (2006).

⁹ Il parametro in questione è definito, nella sua versione standardizzata, come:

$$S = E\left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

La sua stima campionaria \hat{S} è, invece, effettuata calcolando l'espressione:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{x_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^3.$$

¹⁰ Fama (1963); Jansen e Devries (1991); Longin (1996).

¹¹ La misura di *kurtosis* è definita, nella sua versione standardizzata, come:

$$K = E\left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^4\right].$$

La sua stima campionaria \hat{K} è, invece, effettuata calcolando l'espressione:

$$\hat{K} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{x_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^4.$$

¹² Per completezza, nonostante l'evidenza empirica in tal senso sia scarna, è bene ricordare anche la possibilità che la frequenza relativa degli *asset return* estremamente superiori e inferiori alla media sia più contenuta di quella prevista dalla “curva a campana” e che la distribuzione sia, di conseguenza, *thin-tailed*. In questo caso, tale distribuzione verrebbe definita platocurtica e presenterebbe un valore di *kurtosis* inferiore a 3.

¹³ Nelle indagini empiriche del comportamento degli *asset class return*, è possibile riportare, in alternativa al valore della *kurtosis*, quello dell'*excess kurtosis*. Quest'ultimo corrisponde al valore della *kurtosis* decurtato del valore 3 che il parametro assumerebbe in caso di normalità.

da differenti portafogli. Quest'ultima regola corrisponde a una funzione di utilità quadratica avente la forma della (4.6):

$$U(W) = W - \frac{b}{2}W^2 \quad \text{con } b > 0 \quad (4.6)$$

dove W indica la ricchezza finale dell'investitore.

L'assunzione di questa particolare funzione di utilità non è casuale ma intenzionale, poiché essa ammette la dipendenza dell'utilità attesa dall'individuo esclusivamente dalla media e dalla varianza. Ciò può essere dimostrato partendo dalla considerazione di un soggetto orientato a massimizzare l'utilità attesa dalla propria ricchezza finale conseguente a una scelta di portafoglio e dalla successiva riformulazione della sua funzione di utilità attraverso lo sviluppo in serie di Taylor. Procedendo in modo formale e indicando con \mathbf{R} il vettore dei rendimenti delle singole *asset class*, la generica funzione di utilità legata alla ricchezza finale può essere così scritta (4.7):¹⁴

$$U(W) = U(1 + \mathbf{w}'\mathbf{R}) = U(1 + R_p) \quad (4.7)$$

mentre il valore atteso della ricchezza finale è dato dalla (4.8):

$$\bar{W} = (1 + \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) = (1 + \mu_p) \quad (4.8)$$

Secondo lo sviluppo in serie di Taylor, il valore atteso della funzione di utilità può essere riscritto ricorrendo a un numero k tendente a infinito di derivate successive della funzione di utilità stessa e a tutti i momenti centrali della distribuzione della variabile W , come descritto sinteticamente dalla (4.9):

$$E[U(W)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{W})}{k!} E[(W - \bar{W})^k] \quad (4.9)$$

e, in forma più estesa, dalla (4.10):

$$\begin{aligned} E[U(W)] = & U(\bar{W}) + U^{(1)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^1] + \frac{1}{2!}U^{(2)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^2] + \\ & + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^3] + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^4] + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

A questo punto è doveroso osservare che se la specifica funzione di utilità adottata è quadratica, ovvero coincidente con la (4.6), solamente le derivate del primo ordine e del secondo ordine, pari rispettivamente a $1 - bW$ e $-b$, sono diverse da zero, mentre tutte le derivate di ordine superiore sono nulle. Ne consegue che l'utilità attesa dipende esclusivamente dalla media e dalla varianza (4.11):¹⁵

$$E[U(W)] = U(\bar{W}) + \frac{1}{2!}U^{(2)}(\bar{W})\sigma_p^2 \quad (4.11)$$

In breve, dunque, la restrizione della forma di utilità rende legittimo affrontare il problema di *asset allocation* riservando attenzione esclusivamente ai primi due momenti della distribuzione del rendimento di portafoglio e/o della ricchezza finale.

¹⁴ Implicitamente, si è optato arbitrariamente per una ricchezza iniziale unitaria.

¹⁵ È utile ricordare che $E[(W - \bar{W})^2]$ è la varianza e che il valore atteso degli scarti dalla media, ossia $E[(W - \bar{W})]$, è pari a zero.

La letteratura non ha rinunciato a segnalare taluni profili di problematicità connessi all'assunzione di una funzione di utilità quadratica. Già Sarnat accusava la suddetta funzione di utilità di scarsa aderenza con "l'immagine" del reale investitore e criticava la stessa per il fatto di:

- violare il principio di non sazietà;
- implicare un'avversione assoluta al rischio crescente.¹⁶

Relativamente al primo punto, un principio generalmente accolto prevede che una maggiore utilità/soddisfazione sia sempre preferita a una minore utilità, pertanto la funzione di utilità deve presentare la derivata prima positiva. Nel caso della funzione di utilità quadratica, poiché la derivata prima corrisponde a $1 - bW$, ciò è vero solo per valori di $W < 1/b$, mentre per valori superiori si riscontrerebbe esattamente una preferenza opposta. Con riguardo al secondo punto, premesso che l'avversione assoluta al rischio esprime come si modifica l'ammontare assoluto investito in attività rischiose di fronte al modificarsi della ricchezza, l'aspetto non desiderabile è rappresentato dal fatto che un'avversione assoluta al rischio crescente determina un minore *risk taking* e quindi una contrazione dell'entità delle esposizioni rischiose all'aumentare della ricchezza quando, al contrario, un tipico investitore dovrebbe esibire un'avversione assoluta al rischio decrescente e, dunque, la disponibilità all'incremento dell'ammontare a rischio.^{17, 18}

Al di là delle problematiche riconducibili alle implicazioni della funzione di utilità quadratica, ulteriori attacchi al *framework* media-varianza sono stati sollevati da più contributi scientifici, i quali non solo rifiutano l'idea che i momenti di ordine superiore al secondo (*higher order moment*) siano irrilevanti, ma giungono all'individuazione di una precisa direzione delle preferenze per i momenti superiori. In particolare, Scott e Horwath asseriscono che gli investitori tipicamente mostrano una preferenza per movimenti in senso positivo della *skewness* e per movimenti in senso negativo della *kurtosis*.¹⁹ In Kraus e Litzenberger, Harvey e Siddique, Mitton e Vorkink si dimostra, poi, che gli investitori possono essere disposti ad accettare un minor rendimento atteso ed eventualmente anche una maggiore volatilità rispetto a quanto suggerito da una soluzione *mean-variance efficient* in cambio di una *skewness* superiore e di una *kurtosis* inferiore.²⁰

In definitiva, per quanto sin qui detto, è evidente che le restrizioni poste alla forma della funzione di utilità o alla distribuzione degli *asset class return* (per fare della *Mean-Variance Optimization* l'approccio più appropriato per rispondere a un bisogno di *portfolio construction*) possono apparire o risultare poco realistiche e giustificabili. Diventa allora non rinviabile un interrogativo del tipo: è verosimile "sgombrare il campo" dell'*asset allocation* strategica da queste ipotesi e usufruire di un approccio differente, ma altrettanto pragmatico e di agevole implementazione? La risposta è negativa. La conduzione dell'attività di *optimal asset allocation under higher moment* espone, in via alternativa o concomitante, a diverse complicazioni, di seguito sintetizzate:

¹⁶ Sarnat (1974).

¹⁷ La misura di avversione assoluta al rischio è data dal rapporto $\frac{-U^{(2)}(W)}{U^{(1)}(W)}$.

Una condizione di avversione assoluta al rischio decrescente si caratterizza per una derivata prima di tale rapporto inferiore a zero, mentre una condizione (ritenuta contraddittoria e problematica) di avversione assoluta al rischio crescente è confermata da una derivata prima di tale rapporto superiore a zero. Quest'ultima situazione comporta, a sua volta, un'avversione relativa al rischio crescente, ovvero una situazione nella quale la proporzione di ricchezza messa a rischio si riduce con l'aumentare del suo valore assoluto.

¹⁸ Si rinvia a Pratt (1964) per un esame delle misure di avversione al rischio.

¹⁹ Scott e Horwath (1980).

²⁰ Kraus e Litzenberger (1976); Harvey e Siddique (2000); Mitton e Vorkink (2007).

- richiede la stima, in aggiunta ai tradizionali parametri di media e varianza/deviazione standard, della *skewness* e della *kurtosis* delle *asset class* per quanto riguarda i parametri univariati e, nella prospettiva multivariata, di forme addizionali di interazione rispetto ai legami lineari a coppie inclusi nella matrice di covarianza/correlazione, da esprimersi attraverso matrici di co-asimmetria (*co-skewness*) e di co-curtosi (*co-kurtosis*). La necessità di stima di questi *cross-moment* causa un drastico aumento della *dimensionality* del problema;²¹
- impone la gestione del *trade-off* fra più obiettivi conflittuali e rivali se si considera sia il fatto che un investitore vorrebbe massimizzare rendimento atteso e *skewness* di portafoglio (cioè i cosiddetti momenti dispari o *odd moment*) e minimizzare la varianza e la *kurtosis* di portafoglio (cioè i cosiddetti momenti pari o *even moment*), sia l'impossibilità di preservare i singoli obiettivi;
- espone l'investitore alla difficoltà di dover specificare un'esatta funzione di utilità di cui, in realtà, difficilmente ha consapevolezza e di decidere il livello in corrispondenza del quale "troncare" lo sviluppo in serie di Taylor che ne consente l'approssimazione ai fini della successiva implementazione numerica o, in alternativa, presuppone la capacità dell'investitore di esprimere il peso o il rilievo riconosciuto ai vari obiettivi;
- può avvalersi di modelli alternativi delle distribuzioni dei rendimenti delle *asset class* che, se da un lato permettono un miglior *fitting* del reale comportamento dei dati, dall'altro rendono più ostica l'aggregazione delle caratteristiche individuali in una dimensione di portafoglio.

La comprensibile resistenza a farsi carico delle complicazioni appena menzionate fa sì che l'assetto della *Mean-Variance Optimization* continui a rappresentare un punto di riferimento fondamentale per buona parte della letteratura in materia di *asset allocation* e per la comunità dei *practitioner*. Non va poi trascurata l'esistenza di testimonianze a favore della capacità del criterio media-varianza di approssimare, comunque in modo soddisfacente, l'utilità attesa derivante dall'ottimizzazione (massimizzazione) diretta di funzioni di utilità difformi da quella quadratica anche con riguardo ad *asset class return* non guidati da distribuzioni normali.²² Questi confortanti riscontri non fanno naturalmente venir meno l'opportunità, preliminarmente all'implementazione dell'algoritmo di ottimizzazione, di analizzare il grado di significatività statistica dell'eventuale non-normalità dei dati (*asset class return*) e della persistenza di quest'ultima.

L'ultima ipotesi adottata dalla *Mean-Variance Optimization*, come ricordato in apertura del presente paragrafo, concerne la natura *myopic*, ovvero uniperiodale, del modello. La sua portata può essere esplicitata con le parole di Mossin: «By a single-period model is meant a theory of the following structure: The investor makes his portfolio decision at the beginning of a period and then waits until the end of the period when the rate of return on his portfolio materializes. He cannot make any intermediate changes in the composition of his portfolio. The investor makes his decision with the objective of maximizing expected utility of wealth at the end of the period (final wealth)».²³ In un ambiente ideale nel quale poter riscontrare le condizioni di stazionarietà delle distribuzioni dei rendimenti, di assenza

²¹ A sostegno di questa affermazione, si tenga presente che se, per esempio, in un esercizio di ottimizzazione con 10 *asset class*, il numero dei parametri unici (non ridondanti) di correlazione/covarianza richiesti è pari a 45, il numero di parametri unici di *co-skewness* e di *co-kurtosis* richiesti risulta pari, rispettivamente, a 220 e 715. Tali valori sono ottenuti, rispettivamente, dal calcolo di $N(N+1)(N+2)/3!$ e di $N(N+1)(N+2)(N+3)/4!$. Per un esame più approfondito delle problematiche di stima connesse all'impiego dei momenti superiori al secondo nel processo di *asset allocation* strategica, si rinvia a Jondeau e Rockinger (2006) e a Martellini e Ziemann (2010).

²² Kroll *et al.* (1984); Levi e Markowitz (1979); Chamberlein (1983); Simaan (1993).

²³ Mossin (1968), pag. 216.

di autocorrelazione seriale, di assenza di costi di transazione, di avversione relativa al rischio costante dell'investitore e di assenza, da parte sua, di flussi intermedi (così che il rendimento di portafoglio possa ritenersi *path-independent*), la circostanza che il *framework* di Markowitz non riconosca la natura sequenziale del problema di *asset allocation* e la rilevanza che può assumere, per l'investitore, la dinamica nel durante del rendimento di portafoglio, nonché la questione del *rebalancing*, non costituirebbero un punto debole. Ciò perché in siffatto contesto ipotetico l'investimento ripetuto (*roll-over*) in portafogli uniperiodali *mean-variance efficient* condurrebbe a portafogli efficienti multiperiodali. È però evidente che le condizioni menzionate non sono sistematicamente realizzate; di conseguenza un *multiperiod asset allocation model* è in linea di principio auspicabile. Ancora una volta è Mossin a descriverne i tratti fondamentali: «By a multiperiod model is meant a theory of the following structure: The investor has determined a certain future point in time (his horizon) at which plans to consume whatever wealth he has then available. He will still make his investment decisions with the objective of maximizing expected utility of wealth at that time. However, it is now assumed that the time between the present and his horizon can be subdivided into n periods (not necessarily of the same length), at the end of each return on the portfolio held during the period materializes and he can make a new decision on the composition of the portfolio to be held during the next period».²⁴ A proposito di tali decisioni l'autore poi aggiunge: «[...] any sequence of portfolio decisions must be contingent upon the outcomes of previous periods and at the same time take into account information on future probability distributions».²⁵

Per chiarire, in chiusura, il motivo per cui nessuno spazio ulteriore del presente capitolo verrà dedicato al *framework* multiperiodale, pur avendolo legittimato, è opportuno far presente che i tentativi a oggi effettuati per lo sviluppo di un simile approccio si sono scontrati con problemi di implementazione pratica superiori a quelli ravvisabili nell'approccio uniperiodale, soprattutto per portafogli che possono accogliere un numero realistico e non eccessivamente esiguo di *asset class*, e hanno fatto ricorso a ipotesi ancora più stringenti, seppur diverse, da quelle utilizzate in un contesto uniperiodale.²⁶

4.3 L'estimation risk e i problemi pratici della mean-variance optimization

Il Paragrafo 4.2 ha permesso di argomentare e di concludere che le perplessità sollevate relativamente alle assunzioni accolte nel *framework* di Markowitz non sono sufficienti per rinunciare al suo contributo in materia di *asset allocation* strategica. Se la teoria non è in grado di costituire un freno al suo impiego, potrebbero però diventarle delle questioni di natura operativa perché, come affermato da Michaud, «Markowitz MV-optimization technology is not easy to use properly».²⁷ Da qui, allora, l'opportunità di esaminare la classica implementazione della MVO e le insidie che la circondano.

Lo svolgimento di un processo di *portfolio construction à la* Markowitz si articola in due fasi:

- la stima degli input;
- il “lancio” dell'ottimizzazione.

²⁴ Mossin (1968), pag. 220.

²⁵ Mossin (1968), pag. 221.

²⁶ Anche se, come chiarito, non è un obiettivo del presente lavoro quello di proporre una rassegna dei tentativi effettuati per sviluppare *multiperiod asset allocation model*, è bene rammentare che essi hanno fatto ricorso alla programmazione stocastica, alla programmazione dinamica e alle tecniche di *robust optimization*. Una breve trattazione di queste metodologie è rintracciabile nel Capitolo 10 di Fabozzi *et al.* (2007).

²⁷ Michaud (1989), pag. 40.

Nel rispetto dell'originaria esecuzione della *Mean-Variance Analysis*, il primo *step* viene attuato mediante il calcolo dei parametri rilevanti condotto su serie storiche di T rendimenti di N *asset class* osservati in un certo periodo passato. Considerando allora, in linea con una delle ipotesi espresse nel Paragrafo 4.2, che i rendimenti delle *asset class* rappresentino variabili casuali R_i (con $i = 1, \dots, N$) distribuite secondo una normale multivariata, così come mostrato dalla (4.12):²⁸

$$f(\mathbf{R}) = f(R_1, R_2, \dots, R_N) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|} (2\pi)^N} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})\right] \quad (4.12)$$

le statistiche sufficienti da ricavarsi dagli *historical return* per la generica *asset class* i o coppia di *asset class* ij sono definite dalla (4.13) e dalla (4.14):

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{t,i} \quad (4.13)$$

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{t,i} - \hat{\mu}_i) \cdot (R_{t,j} - \hat{\mu}_j) \quad (4.14)$$

descrittive, rispettivamente, degli elementi del vettore delle medie campionarie (storiche) $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ e della matrice di varianza-covarianza campionaria (storica) $\hat{\Sigma}$. Per rendere visivamente immediata la percezione della natura (normale) multivariata di un fenomeno si rinvia alla Tabella 4.1. Il secondo *step* consiste nel risolvere il problema di programmazione quadratica descritto, alternativamente, dalla (4.3a), (4.3b), (4.4a), (4.4b) o dalla (4.5), così da ottenere i pesi ottimi di portafoglio (*optimal portfolio weight*). Naturalmente, i parametri appena stimati fungeranno da input del problema di programmazione quadratica.

Com'è facile intuire, questo modo di procedere finisce per equiparare le stime campionarie (*sample estimate*) ai veri parametri del modello di ottimizzazione e, quindi, per supporre il possesso di input capaci di presagire fedelmente e perfettamente rendimenti, rischi e legami che si materializzeranno nell'*investment period* futuro. Ne deriva inevitabilmente la caratterizzazione della *traditional Mean-Variance Optimization* come un approccio all'*asset allocation* strategica di tipo deterministico che impone al suo potenziale utilizzatore l'atteggiamento utopistico e imprudente di chi neppure menziona o del tutto ignora l'incertezza connessa agli input. Evidentemente, la verità è un'altra: quelli stimati dai dati sono parametri di sintesi delle proprietà di distribuzioni di probabilità degli R_i non perfettamente conosciute, pertanto tali parametri sono soggetti a incertezza!

Sulla base di queste considerazioni, si può affermare che l'implementazione standard della *Mean-Variance Optimization* è quindi colpevole di ignorare una forma addizionale di rischio connessa alla necessità di avanzare stime di parametri e definita come rischio di stima o *estimation risk*.²⁹ Per comprendere se questa omissione può costituire un serio problema e uno scoglio all'uso dell'approccio di Markowitz è bene procedere, innanzi tutto, fornendo una definizione di tale rischio e, secondariamente, analizzando gli impatti che il suo mancato riconoscimento e, soprattutto, la sua mancata gestione possono esercitare sui *mean-variance efficient portfolio*.

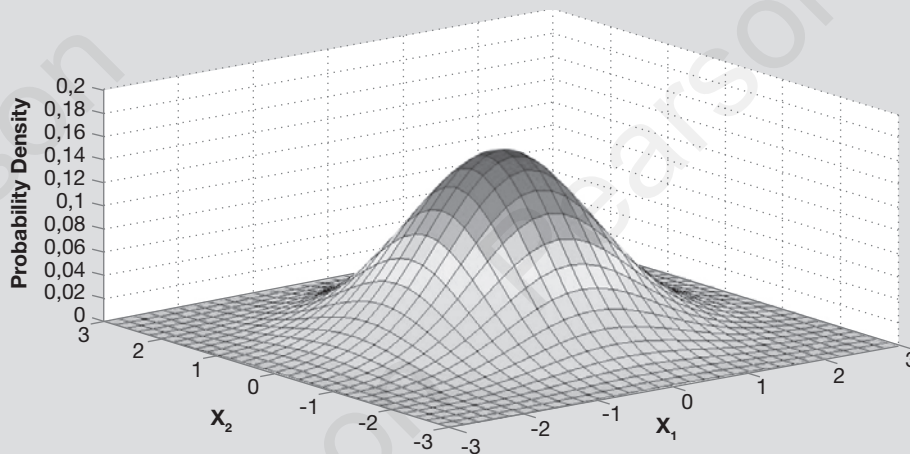
²⁸ Come argomento nella radice quadrata in (4.12), $|\Sigma|$ indica il determinante della matrice di varianza e covarianza.

²⁹ Diversi autori hanno "denunciato" l'esistenza e la criticità dell'*estimation risk*. Fra i tanti, si ricordano: Garlappi *et al.* (2007); Frankfurter *et al.* (1971); Frost e Savarino (1986a, 1986b); Herold e Maurer (2003; 2006).

Tabella 4.1 La distribuzione normale multivariata.

Una distribuzione di probabilità multivariata \mathbf{X} di dimensione N può essere vista come rappresentazione della probabilità di eventi misurata congiuntamente con riferimento a N variabili casuali X_i (con $i = 1, \dots, N$). Nel contesto gaussiano, la generalizzazione dal caso univariato a quello multivariato conduce alla distribuzione normale multivariata, la quale dipende da due parametri: un vettore di medie e una matrice di covarianza. Ciò spiega la notazione generalmente utilizzata per indicare una simile distribuzione, ovvero $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$. Per rendere possibile la rappresentazione in una immagine tridimensionale della funzione di densità di probabilità (*pdf*) della normale multivariata, si è considerato, a titolo esemplificativo, il caso della normale standard bivariata per la quale $N = 2$.

Si ha, allora, che $\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il vettore delle medie accoglie, dunque, valori nulli e la matrice di covarianza coincide con una matrice identità. La *pdf* è di seguito riprodotta.



Andando nell'ordine, l'*estimation risk* può definirsi come la possibilità di commettere un *estimation error* ($\boldsymbol{\varepsilon}_{error}$), intendendo come tale la differenza tra il valore stimato di un generico parametro ($\hat{\theta}$) e il vero valore di quel parametro (θ), ovvero (4.15):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{error} = \hat{\theta} - \theta \quad (4.15)$$

In breve, l'*estimation risk* definisce l'eventualità, tutt'altro che remota, di disporre di input stimati imprecisi.

Gli effetti del risolvere il problema di *asset allocation* assumendo erroneamente e presuntuosamente l'estrema accuratezza degli input sono vari e interrelati. In primo luogo, è bene menzionare il carattere non intuitivo dei portafogli *à la* Markowitz per la cui interpretazione sono di ausilio le parole di Michaud: «MV optimizers have serious financial deficiencies, which will often lead to financially meaningless 'optimal' portfolios».³⁰

Gli indizi, o meglio, le dimostrazioni della scarsa portata finanziaria e della non intuitività dei portafogli *mean-variance efficient* devono riconoscersi nel basso grado di diversificazione delle loro composizioni, che includono solo poche delle *asset class* disponibili, e negli *shift* violenti ed estremi delle allocazioni lungo il tracciato della frontiera efficiente. Ancora Michaud attribuisce proprio alla natura concentrata ed estrema degli *optimal portfolio* la spiegazione di ciò che l'autore stesso ha definito come "Markowitz Optimization

³⁰ Michaud (1989), pag. 33.

Enigma”, ovvero la situazione inizialmente e apparentemente incomprensibile che ha visto i *practitioner* dell'*investment community* a lungo rifuggire dall'approccio à la Markowitz, nonostante quest'ultimo avesse messo a disposizione un algoritmo di calcolo dei portafogli efficienti facilmente applicabile e un *framework* concettuale accessibile.³¹ Il trattamento degli input alla stregua di parametri esatti e, dunque, il disconoscimento dell'*estimation risk* sono all'origine dell'assetto contro-intuitivo dei portafogli efficienti perché fanno sì che l'ottimizzatore tenda ad assumere un atteggiamento molto discriminatorio e cioè a selezionare quelle *asset class* con caratteristiche attraenti (alto rendimento, basso rischio e correlazione) e a estromettere quelle con caratteristiche meno *appealing*, piuttosto che orientarsi a ricercare e a sfruttare spazi di complementarietà.

Tuttavia, proprio quelle *asset class* che, stando alle stime campionarie, mostrano tratti assai invidiabili, ancora più probabilmente soffriranno di non trascurabili *estimation error*, per cui il fatto che siano *overweighted* in una MVO fa sì che l'impatto di tali errori sugli *optimal portfolio weight* sia massimizzato. È opportuno prendere nuovamente a prestito le parole con le quali Michaud espone in modo sintetico, ma comunque incisivo, quanto emerso dalle considerazioni testé sviluppate: «The unintuitive character of many optimized portfolios can be traced to the fact that MV optimizers are, in a fundamental sense, estimation error maximizers».³²

A rinvolgimento di tale messaggio, si può aggiungere una riflessione forse banale, ma non superflua nella prospettiva di chi operativamente affronta i problemi di *asset allocation* strategica: i portafogli costruiti con trascuratezza o disattenzione per il problema dell'*estimation risk* sono destinati a rivelarsi i portafogli più vulnerabili proprio agli errori di stima (che poi si scoprirà di aver commesso) in quanto privati, dal loro assetto contro-intuitivo ed estremamente concentrato, di una possibile forma di difesa!³³

Volendo allora procedere nell'esame degli effetti della noncuranza per l'*estimation risk*, l'attenzione è ora rivolta al problema dell'instabilità dei portafogli ottimi. Quest'ultima espressione fa riferimento all'elevata sensibilità delle allocazioni di portafoglio a fronte di variazioni esigue negli input (in modo particolare nelle stime dei rendimenti attesi). In altri termini, essa definisce lo stravolgimento dei pesi di portafoglio a cui è possibile assistere per effetto di una eccessiva rispondenza della *Mean-Variance Optimization* a mutamenti nel *set* dei parametri che fungono da input. Anche se quello dell'instabilità è un punto di debolezza riferibile, almeno logicamente, alla generalità dei portafogli à la Markowitz, va ammesso che esso diventa più concretamente percepibile se sussistono talune condizioni; più precisamente, se “l'universo investibile” include almeno coppie di *asset class* contraddistinte da combinazioni rischio-rendimento ($\hat{\sigma}; \hat{\mu}$) molto simili. La ragione è facilmente identificabile: un algoritmo che utilizza delle stime puntuali come input e tratta questi ultimi come grandezze conosciute con certezza, reagisce spropositatamente a piccole “perturbazioni” di tali stime, se esse sono sufficienti a configurare un avvicendamento nella posizione di *asset class* dominante e dominata, in quanto intende quella variazione come sostanziale e indubbia. L'atteggiamento dell'ottimizzatore è cioè così freddo, distaccato e oggettivo da non concepire, come risulterebbe spontaneo per qualun-

³¹ Nel suo noto contributo “The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?”, Michaud (1989) scriveva (pag. 31): «Given the success of the efficient frontier as a conceptual framework, and the availability for nearly 30 years of a procedure for computing efficient portfolios, it remains one of the outstanding puzzles of modern finance that MV optimization has yet to meet with widespread acceptance by the investment community, particularly as a practical tool for active equity investment management. Does this Markowitz optimization enigma reflect a considerable judgment (by the investment community) that such methods are not worthwhile, or is it merely another case of deep-seated resistance to change?».

³² Michaud (1989), pag. 33.

³³ Implicitamente, l'affermazione sottende l'idea che l'*asset diversification* debba apprezzarsi non solo come via per la gestione del rischio finanziario, ma anche come forma di gestione dell'*estimation risk*.

que essere umano, che può semplicemente trattarsi di una discrepanza dovuta a un errore di misurazione (indotto, per esempio, dall'introduzione di poche osservazioni aggiuntive nel campione dei rendimenti storici o dal *roll-over* del campione storico). Com'è facile immaginare, quella dell'instabilità degli *optimal weight* è una questione che preoccupa un *asset manager* e che potrebbe concorrere ad allontanarlo da un approccio quantitativo all'*asset allocation*. È infatti lecito che egli possa non nutrire alcun convincimento nel proporre portafogli strategici ottimizzati sapendo che quelle proposte di investimento potrebbero essere "sconvolte" da modifiche, ritenute insignificanti, di taluni parametri e che, di conseguenza, egli finisca per respingere l'intero approccio. Per un esempio sulla questione dell'instabilità dei portafogli *à la* Markowitz, si rinvia alla Tabella 4.2.

Una terza implicazione connessa alla mancata ammissione di possibili *estimation error* negli input consiste nell'affermarsi di un'idea fuorviante, quella dell'unicità dei portafogli ottimi. Anche su questo fronte, si rintraccia nel contributo di Michaud una testimonianza preziosa: «Optimizers, in general, produce a unique 'optimal' portfolio for a given level of risk. This appearance of exactness is highly misleading, however. The uniqueness of the solution depends on the erroneous assumption that the inputs are without statistical estimation error».³⁴

In verità, quello di "portafoglio ottimo" è un concetto ambiguo, non ben definito se si ammette l'esistenza dell'*estimation risk*. A livello visivo, questa nuova concezione può essere trasmessa rappresentando, in corrispondenza di ciascun punto della frontiera efficiente classica, una regione di punti nelle immediate vicinanze che accoglie portafogli statisticamente indifferenti da quelli *mean-variance efficient*.³⁵ Un'immagine di questo tipo può efficacemente ricordare che le stime campionarie con cui l'ottimizzatore viene alimentato costituiscono una specifica realizzazione di variabili casuali tra le tante possibili.

L'ultimo "atto d'accusa" rivolto ai portafogli *à la* Markowitz è costituito dalla denuncia, pronunciata da vari autori, della loro *poor out sample performance*.³⁶ Questa caratteristica esprime il drastico e preoccupante deterioramento della performance (anche nella versione *risk-adjusted*) dei portafogli *mean-variance efficient* misurata su un *holding period* al di fuori, precisamente successivo (appunto *out of sample*), rispetto a quello storico utilizzato per la stima di rendimenti medi, rischi e correlazioni/covarianze campionarie (detto, invece, *periodo in sample*). Il livello di approssimazione ai "veri input" mostrato dai parametri di derivazione storica risulta tale da non permettere di trovare *ex post* conferma dell'efficienza di *asset mix* considerati ottimali a priori. Il materializzarsi degli *estimation error* rende, dunque, i portafogli *à la* Markowitz dei falsi portafogli ottimi che anche una regola di diversificazione *naïve* (per esempio la regola dell'*I over N*, ossia dell'equiponderazione) è in grado di battere. È bene osservare che, in linea di massima, esiste una relazione di tipo inverso tra grado di diversificazione dei portafogli e livello di esposizione al pericolo della *poor out of sample performance*. Detto diversamente, le possibili conseguenze nefaste di imprecisioni commesse nelle stime dei parametri verosimilmente si manifestano con maggior forza allorché si è permesso l'assorbimento di porzioni estreme dell'*asset allocation* a opera di una singola *asset class* o di un loro numero irrisorio. A conferma del fatto che i portafogli ottimi *à la* Markowitz non sono, alla prova dei fatti, necessariamente dei buoni portafogli, vale la pena di ricordare il contributo di Ceria e Stubbs in cui si pone in risalto il posizionamento, in uno spazio di coordinate rischio-rendimento, dell'*actual frontier* (rappresentativa delle reali combinazioni rischio-rendimento di portafogli la cui *asset allocation* è però preventivamente derivata dall'ottimizzazione

³⁴ Michaud (1989), pag. 35.

³⁵ Per una illustrazione esauriente dei portafogli statisticamente indifferenti o equivalenti si rinvia al Paragrafo 4.7.1.

³⁶ Michaud (1989); Jorion (1992); Jorion (1985); DeMiguel *et al.* (2009); Kan e Zhou (2007); Jorion (1991).

Tabella 4.2 L'instabilità dei portafogli à la Markowitz.

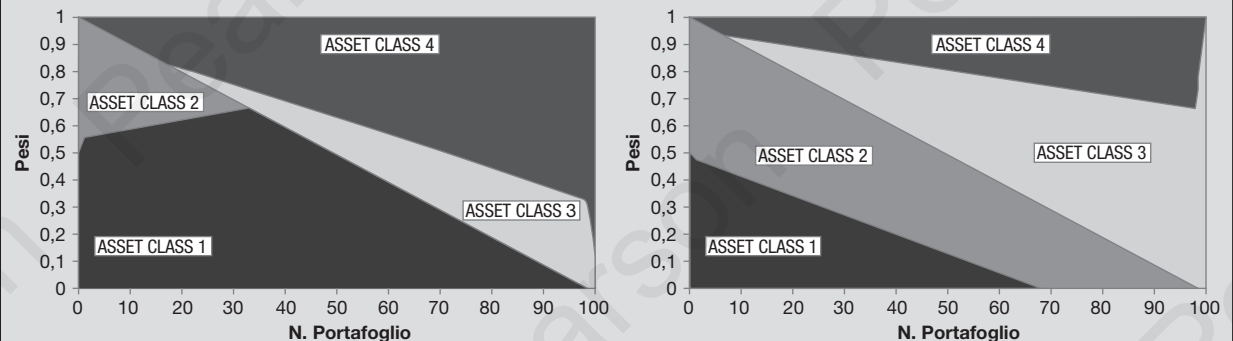
Qui si intende fornire un esempio, molto didattico, per porre in evidenza il problema dell'instabilità dei portafogli ottenuti dalla *Mean-Variance Optimization*. Come noto, esso è indotto da un'accentuata sensibilità dell'ottimizzazione a modifiche marginali degli input. Nell'esempio, l'"universo investibile" si compone di quattro *asset class* di cui la tabella seguente riporta i valori originari dei parametri rilevanti stimati (rendimenti medi, deviazioni standard, correlazioni):

	RENDIMENTO MEDIO	DEVIAZIONE STANDARD		ASSET CLASS 1	ASSET CLASS 2	ASSET CLASS 3	ASSET CLASS 4
ASSET CLASS 1	3,20%	5,00%	ASSET CLASS 1	1	0,85	0,50	0,45
ASSET CLASS 2	3,12%	5,00%	ASSET CLASS 2	0,85	1	0,50	0,45
ASSET CLASS 3	8,00%	22,00%	ASSET CLASS 3	0,50	0,50	1	0,90
ASSET CLASS 4	8,20%	22,00%	ASSET CLASS 4	0,45	0,45	0,90	1

La successiva tabella accoglie, con riguardo allo stesso "universo investibile", delle variazioni di due misure di rendimento medio che, con ogni probabilità, un *asset manager* considererebbe non molto significative o cruciali:

	RENDIMENTO MEDIO	DEVIAZIONE STANDARD		ASSET CLASS 1	ASSET CLASS 2	ASSET CLASS 3	ASSET CLASS 4
ASSET CLASS 1	3,20%	5,00%	ASSET CLASS 1	1	0,85	0,50	0,45
ASSET CLASS 2	3,22%	5,00%	ASSET CLASS 2	0,85	1	0,50	0,45
ASSET CLASS 3	8,40%	22,00%	ASSET CLASS 3	0,50	0,50	1	0,90
ASSET CLASS 4	8,20%	22,00%	ASSET CLASS 4	0,45	0,45	0,90	1

I parametri riportati nelle tabelle sono poi utilizzati per "lanciare" due ottimizzazioni coerenti con il modello di Markowitz. Il grafico sottostante rappresenta, nell'ordine, le composizioni dei portafogli efficienti ottenuti con il primo e il secondo set di input.



Com'è agevole osservare, i *portfolio weight* risultano fortemente modificati dalle variazioni apportate agli input, nonostante le stesse siano giudicate pressoché irrilevanti da un soggetto decisore. Nel grafico ad area di sinistra, le allocazioni dei portafogli ottimi prediligono fortemente le *asset class* 1 e 4; l'*asset class* 2 è presente, con un peso via via più ridotto, nei portafogli ottimi non oltre la 35-esima posizione e la presenza dell'*asset class* 3, soprattutto nei portafogli "centrali", è assai contenuta. Nel grafico ad area di destra, invece, le esposizioni suggerite verso le *asset class* 2 e 3 sono nettamente prevalenti e risultano confinate a un ruolo secondario le *asset class* 1 e 4. La ragione di una composizione della frontiera efficiente sensibilmente diversa nei due casi è facilmente identificabile: per l'algoritmo di ottimizzazione di Markowitz, le modifiche, in verità marginali, che attingono agli input sono percepite come sostanziali e, poiché creano un'alternanza tra *asset class* dominanti e *asset class* dominate, finiscono per stravolgere i vettori dei pesi che descrivono i portafogli.

condotta su rendimenti attesi stimati) ampiamente al di sotto della *true frontier* (rappresentativa, invece, delle combinazioni rischio-rendimento dei portafogli calcolati con i veri rendimenti attesi, naturalmente inizialmente non osservabili).³⁷

Le caratteristiche di non intuitività, di instabilità, di ambiguità e di *poor out of sample performance* dei portafogli originati dalla tradizionale implementazione della *Mean-Variance Optimization* di Markowitz passate in rassegna in queste pagine possono innegabilmente e comprensibilmente dissuadere da un suo pratico utilizzo. Per non incorrere in equivoci e per evitare decisioni non ben soppesate, è prioritario mettere adeguatamente in risalto l'origine di questi difetti. Ebbene, essa non è identificabile in un limite intrinseco, strutturale o scientifico dell'approccio di Markowitz, bensì nel modo in cui quest'ultimo utilizza le informazioni che gli vengono fornite. Si tratta, come più volte ribadito, di un impiego che ignora completamente l'incertezza connessa agli input dell'ottimizzazione e i possibili effetti degli *estimation error*. Si può arrivare ad affermare che l'algoritmo di *portfolio optimization* messo a disposizione da Markowitz è fin troppo potente, considerato il grado di bontà e di attendibilità dell'informazione circa le proprietà finanziarie prospettiche delle *asset class* espressa dalle stime formulate.³⁸ Se è condiviso che il problema non si sostanzia nell'irragionevolezza o incoerenza dell'approccio, ma nella sua forza di *overfitting* di dati la cui qualità non può dirsi eccelsa, allora è logico che la decisione opportuna da assumere non sia quella di abbandonare l'uso operativo dell'approccio di Markowitz, quanto quella di includere e gestire l'*estimation risk* all'atto della sua implementazione operativa. I paragrafi successivi procederanno in tal senso. In questa fase, invece, avendo ormai ampiamente sottolineato la criticità dell'*estimation risk*, si vuole completare l'analisi illustrando le condizioni che possono esasperare o all'opposto attenuare gli *estimation error* allorché le stime sono derivate da dati storici. Sul punto, diversi contributi in materia concordano nel sostenere che, in ipotesi di serie degli *asset class return independent and identically distributed (i.i.d)*, $\hat{\mu}$ diventa uno stimatore più accurato e preciso del vettore μ all'aumentare della *sample size*, mentre $\hat{\Sigma}$ è meglio in grado di approssimare la matrice Σ all'aumentare della differenza tra il numero di osservazioni storiche T disponibili e il numero N delle *asset class*. Sintetizzando e semplificando, l'impatto dell'*estimation risk* e l'entità dei possibili *estimation error* tendono ad aumentare con l'incremento del numero delle *asset class* coinvolte nel processo di *asset allocation* strategica e a diminuire con l'aumentare dell'estensione delle serie storiche dalle quali sono ricavate le stime campionarie. Quanto appena detto, evidentemente, individua l'errore campionario (*sampling error*) come responsabile dell'*estimation risk*. Per questo, il problema può apparire facilmente rimediabile aumentando il numero di osservazioni T , per esempio attraverso l'affidamento a periodi storici più estesi.³⁹ Se, invece, si accetta di mettere in discussione l'ipotesi di indipendenza e identità distributiva (*i.i.d. assumption*), è evidente che la non stazionarietà rappresenta una ulteriore fonte di *estimation risk* il quale può risultare acuito dall'allungamento delle serie storiche utilizzate.

Nei passaggi precedenti, si è fatto correttamente riferimento all'*estimation risk* come a un problema che pervade l'intero *set* di input richiesto dalla *Mean-Variance Optimization*. È tuttavia legittimo interrogarsi circa la possibilità di attribuire, in termini relativi, un im-

³⁷ Ceria e Stubbs (2006).

³⁸ Volendo utilizzare un'espressione familiare alla comunità finanziaria, si tratta di un caso di GIGO, sigla di "garbage in, garbage out", ossia: input cattivi possono portare ad output anche peggiori!

³⁹ A tale proposito, Jobson e Korkie (1981, pag. 73) scrivono: «The number of historical observations of monthly returns required to give reasonably unbiased estimates of the optimal risk and return is at least two hundred» e, ancora (pag. 70), «The traditional Markowitz procedure for predicting the optimal risk-return is extremely poor with conventional sample sizes of four to seven years». È bene precisare che il frequente riferimento, nella letteratura in tema di *asset allocation*, a periodi *in sample* composti da sequenze di osservazioni mensili, anziché giornaliere o settimanali, non è fortuito. Il motivo è rappresentato dal fatto che nel primo caso vi sono maggiori possibilità di riscontrare la stazionarietà della serie (oltre che la sua normalità) di quanto accada negli altri due casi.

patto differente agli *estimation error* riguardanti i parametri dei rendimenti, delle volatilità e delle correlazioni/covarianze. Sulla questione, la letteratura sostiene che il sacrificio, in termini di rinuncia alla performance attesa *out of sample*, conseguente agli errori di stima dei rendimenti attesi, è ben più gravoso di quello provocato da errori nella matrice di covarianza. Per esempio, Chopra e Ziemba stimano un impatto degli errori nelle medie dieci volte superiore all'impatto degli errori nelle varianze (deviazioni standard) e quest'ultimo equivalente al doppio dell'impatto degli errori nelle correlazioni.⁴⁰ Alla luce di questi elementi, non sorprende che, proprio per la stima dei rendimenti attesi, non siano mancati in ambito scientifico gli sforzi per evitare che l'algoritmo di ottimizzazione debba essere "alimentato" esclusivamente da una media estrapolata da una sequenza di rendimenti storici.

4.4 Un esempio di applicazione dell'approccio di Markowitz

Le pagine precedenti hanno fornito un'ampia descrizione della struttura, delle ipotesi e delle criticità dell'approccio di Markowitz. Per consentire al lettore di "fare esperienza" di tutto ciò, si propone un caso di applicazione del modello di questo autore.

Effettivamente, il processo di costruzione degli *asset mix* strategici prende avvio con l'identificazione da parte dell'*asset manager* delle *asset class*, ovvero dei mercati che egli ammette possano essere inclusi nei portafogli strategici finali. Questo primo *step* equivale a tracciare i confini dell'"universo investibile". Nel fare ciò, è auspicabile che l'*asset manager* mostri attenzione per le preferenze degli investitori/utenti finali e/o solleciti un loro coinvolgimento nella decisione. Per accantonare l'impressione di stranezza che una simile affermazione può sollevare, basti pensare all'opportunità che gli organi direttivi di un fondo pensione (per esempio il consiglio di amministrazione) condividano la scelta delle categorie di investimento verso le quali potrebbero dirigersi le masse amministrare da ciascun comparto del fondo pensione stesso o, ancora, all'utilità per i *financial advisor* (in special modo di clienti di elevato *standing*) di evitare una loro totale emarginazione dalla definizione dei mercati che potrebbero finire per essere inseriti nel loro portafoglio finanziario. Sulla base di quanto detto, è facile intuire sia che questa prima fase non ubbidisce a rigide regole da elencare in una sorta di *vademecum* sia che essa risente di elementi soggettivi. Ciò nonostante, si possono avanzare alcune indicazioni di massima che è sperabile non siano del tutto disattese. Si tratta, in particolare, dell'opportunità di:

- mettere in evidenza ciò che si reputa essere il *driver* prevalente della diversificazione (*country effect versus industry effect*) con la conseguente connotazione degli *asset mix* strategici in termini geografici o settoriali;⁴¹
- evitare o limitare le situazioni di parziale sovrapposizione tra le *asset class* selezionate;
- non eccedere nel numero delle *asset class* selezionate per non esasperare la "dimensionalità" del problema di calcolo dei portafogli ottimi e, in alcuni contesti, per evitare di incorrere in raccomandazioni di esposizioni verso mercati talmente marginali da risultare difficilmente implementabili;

⁴⁰ Chopra e Ziemba (1993).

⁴¹ L'opzione per il criterio geografico quale *driver* della diversificazione implicitamente riconosce in fattori quali la politica monetaria e fiscale, la dinamica valutaria, la condizione dei conti pubblici, la dinamica del PIL, l'assetto istituzionale e politico gli elementi in grado di generare, al contempo, somiglianze tra gli strumenti finanziari appartenenti a una certa area geografica/paese e differenze con quelli appartenenti ad altre aree geografiche/paesi. L'opzione, invece, per il criterio settoriale ravvisa in un'altra tipologia di fattori quali, a titolo esemplificativo, la disponibilità di talune materie prime, la presenza di innovazioni tecnologiche, la domanda per certi beni/prodotti, gli elementi capaci di creare, simultaneamente, un certo grado di omogeneità tra strumenti finanziari riferibili allo stesso settore e di eterogeneità con quelli riconducibili ad altri settori.

- preservare la possibilità per gli investitori di accedere alla diversificazione internazionale evitando l'esclusiva selezione di *asset class* di natura domestica che determinerebbe aprioristicamente per qualunque portafoglio strategico un pesante *home bias*;
- assumere consapevolmente una decisione circa il trattamento dell'esposizione al rischio di cambio (*currency exposure*) implicita negli investimenti esteri, una volta convenuta l'apertura alla diversificazione internazionale. Schematizzando, l'alternativa che si pone è quella dell'*hedging versus* il *non-hedging*, ovvero quella di considerare esposizioni estere coperte dal rischio di cambio o aperte al rischio di cambio.⁴²

Assumendo che l'*asset manager* abbia provveduto a individuare le *asset class* nel rispetto dei principi di massima qui esposti, il compito successivo che gli compete è quello di associare, a ciascuna di esse, un indice di riferimento, detto *benchmark*, che ne rappresenti l'andamento. L'abbinamento *asset class-benchmark* è un passaggio obbligato per diversi motivi:

- elimina qualsiasi elemento di ambiguità nell'individuazione e delimitazione di un'*asset class*;
- permette di disporre di elementi oggettivi, condivisi e accessibili (la serie di un *benchmark*) sui quali condurre le elaborazioni necessarie per giungere alle stime dei parametri richiesti dalla procedura di ottimizzazione;
- è di ausilio per la fase di gestione strategica dei portafogli, cioè quella fase in cui si richiede, tra le altre cose, di concretizzare attraverso prodotti/mandati gestori le esposizioni suggerite verso le *asset class*, in quanto chiarisce fin da subito l'obiettivo cui la gestione dovrà tendere o con il quale dovrà confrontarsi, a seconda che prevalga l'opzione della gestione passiva o quella della gestione attiva.

Nell'applicazione pratica qui proposta si ipotizza di svolgere il processo di *asset allocation* strategica al servizio di un investitore residente nell'Area Euro. Allo scopo, il *set* di mercati che l'*asset manager* è disposto a combinare insieme si compone di nove *asset class* espressive di investimenti di natura monetaria, obbligazionaria e azionaria. Coerentemente con quanto sopra, si è provveduto ad associare a ciascuna di esse un *benchmark*. In tutti i casi, la scelta è stata a favore di indici *total return*, lordi e *value/capitalization weighted*.

La Tabella 4.3 riassume gli abbinamenti effettuati.

L'iter dell'attività di *asset allocation* strategica prosegue con la stima degli input della *Mean-Variance Optimization* (rendimenti attesi, rischi attesi e covarianze/correlazioni attese). In linea con la condotta classica discussa nel precedente paragrafo, essi sono qui sostituiti dai valori estrapolati da un campione di dati storici. Precisamente, si sono presi in considerazione i 240 rendimenti mensili di ciascuna *asset class* nel periodo di 20 anni intercorrente tra gennaio 2003 e dicembre 2022. Tutti i rendimenti sono espressi in euro; ciò significa che, anche per quelle *asset class* la cui valuta di denominazione non corrisponde all'euro, si sono comunque considerate performance espressive del rendimento nella prospettiva di un investitore residente nell'Eurozona. Si è optato per il *non-hedging* o, equivalentemente, per l'apertura al rischio di cambio, come condotta in tema di *currency exposure*; ciò spiega l'elevata deviazione standard stimata per l'indice *Bloomberg US Treasury Bond*, istintivamente non consona ad una *asset class* obbligazionaria governativa. Le stime campionarie ottenute sono riportate, in forma annualizzata, nelle successive Tabelle 4.4, 4.5 e 4.6.

⁴² Sul piano logico e sostanziale, l'alternativa dell'*hedging* e del *non-hedging* equivale, semplificando, a contrapporre l'accettazione del *forward premium* o *discount* noto a priori, da un lato, con una perdita o un guadagno incerto indotto dal cambio, dall'altro lato. Al riguardo, si rinvia al Capitolo 18 e al contributo di Schmittmann (2010).

<i>Asset class/Mercato</i>	<i>Benchmark identificativo</i>
Monetario Area Euro	BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX
Obbligazionario governativo Area Euro	BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND
Obbligazionario Governativo USA	BLOOMBERG US TREASURY BOND
Obbligazionario Governativo Paesi Emergenti	J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE
Obbligazionario Corporate Globale	BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE
Azionario Europa	MSCI EUROPE
Azionario Nord America	MSCI NORTH AMERICA
Azionario Pacifico	MSCI PACIFIC FREE
Azionario Paesi Emergenti	MSCI EMERGING MARKETS

Tabella 4.3 Asset class/mercati e benchmark selezionati.

	<i>RENDIMENTO MEDIO (su base annua)</i>	<i>DEVIAZIONE STANDARD (su base annua)</i>
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	1,07%	0,46%
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	2,80%	4,65%
BLOOMBERG US TREASURY BOND	3,00%	9,92%
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	6,38%	9,65%
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	4,10%	9,31%
MSCI EUROPE	7,24%	14,44%
MSCI NORTH AMERICA	8,22%	14,01%
MSCI PACIFIC FREE	7,12%	13,95%
MSCI EMERGING MARKETS	9,85%	17,58%

Tabella 4.4 Stime campionarie (storiche) di rendimento e rischio (μ e σ).

Tabella 4.5 Stime campionarie (storiche) di varianza e covarianza ($\hat{\Sigma}$).

<i>VARIANZE-COVARIANZE (su base annua)</i>	<i>BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX</i>	<i>BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND</i>	<i>BLOOMBERG US TREASURY BOND</i>	<i>J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE</i>	<i>BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE</i>	<i>MSCI EUROPE</i>	<i>MSCI NORTH AMERICA</i>	<i>MSCI PACIFIC FREE</i>	<i>MSCI EMERGING MARKETS</i>
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	0,000021	0,000017	0,000008	-0,000021	-0,000034	-0,000090	-0,000129	-0,000086	-0,000047
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,000017	0,002164	0,001457	0,001764	0,001582	0,000414	0,000634	0,000627	0,000357
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,000008	0,001457	0,009845	0,005592	0,008148	-0,003581	0,001196	0,000602	-0,003607
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	-0,000021	0,001764	0,005592	0,009304	0,007261	0,005004	0,007286	0,007082	0,007124
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	-0,000034	0,001582	0,008148	0,007261	0,008667	0,001148	0,005065	0,004390	0,001663
MSCI EUROPE	-0,000090	0,000414	-0,003581	0,005004	0,001148	0,020849	0,016304	0,014789	0,018849
MSCI NORTH AMERICA	-0,000129	0,000634	0,001196	0,007286	0,005065	0,016304	0,019620	0,014620	0,016007
MSCI PACIFIC FREE	-0,000086	0,000627	0,000602	0,007082	0,004390	0,014789	0,014620	0,019450	0,018340
MSCI EMERGING MARKETS	-0,000047	0,000357	-0,003607	0,007124	0,001663	0,018849	0,016007	0,018340	0,030919

Tabella 4.6 Stime campionarie (storiche) di correlazione.

MATRICE DI CORRELAZIONE	BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	BLOOMBERG US TREASURY BOND	J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	MSCI EUROPE	MSCI NORTH AMERICA	MSCI PACIFIC FREE	MSCI EMERGING MARKETS
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	1,00	0,08	0,02	-0,05	-0,08	-0,14	-0,20	-0,13	-0,06
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,08	1,00	0,32	0,39	0,37	0,06	0,10	0,10	0,04
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,02	0,32	1,00	0,58	0,88	-0,25	0,09	0,04	-0,21
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	-0,05	0,39	0,58	1,00	0,81	0,36	0,54	0,53	0,42
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	-0,08	0,37	0,88	0,81	1,00	0,09	0,39	0,34	0,10
MSCI EUROPE	-0,14	0,06	-0,25	0,36	0,09	1,00	0,81	0,73	0,74
MSCI NORTH AMERICA	-0,20	0,10	0,09	0,54	0,39	0,81	1,00	0,75	0,65
MSCI PACIFIC FREE	-0,13	0,10	0,04	0,53	0,34	0,73	0,75	1,00	0,75
MSCI EMERGING MARKETS	-0,06	0,04	-0,21	0,42	0,10	0,74	0,65	0,75	1,00

Alla luce dei contenuti del Paragrafo 4.2, è noto che l'affidamento esclusivo sui parametri appena stimati per il processo di *portfolio construction* si fonda su una rappresentazione semplificata delle preferenze dell'investitore o sull'accoglimento di una ipotesi circa il comportamento degli *asset class return* comoda e funzionale al contesto di portafoglio ma, di certo, non sistematicamente soddisfatta dalle loro reali performance. Per dar prova del *framework* semplificato e agile proprio del modello di Markowitz, una via percorribile è quella di una esplorazione un poco più attenta delle proprietà statistiche dei rendimenti dei *benchmark* selezionati. Per prima cosa, si effettua la stima dei primi quattro momenti statistici sulle serie mensili (Tabella 4.7).

Tabella 4.7 Stime su dati mensili dei primi quattro momenti statistici.

	Media	Deviazione Standard	Skewness	Kurtosis
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	0,089%	0,133%	0,993	3,003
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,234%	1,343%	-0,516	4,619
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,250%	2,864%	0,665	4,305
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	0,531%	2,784%	-0,276	5,700
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	0,342%	2,688%	0,464	3,719
MSCI EUROPE	0,603%	4,168%	-0,435	4,472
MSCI NORTH AMERICA	0,685%	4,043%	-0,307	3,785
MSCI PACIFIC FREE	0,593%	4,026%	-0,092	3,835
MSCI EMERGING MARKETS	0,821%	5,076%	-0,475	4,428

Tabella 4.8 Test Jarque-Bera sui benchmark selezionati.

	Statistica JB	Critical value	P-value	Ipotesi di normalità
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	39,405	11,642	0,100%	Rifiutata
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	36,855	11,642	0,100%	Rifiutata
BLOOMBERG US TREASURY BOND	34,695	11,642	0,100%	Rifiutata
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	75,938	11,642	0,100%	Rifiutata
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	13,802	11,642	0,648%	Rifiutata
MSCI EUROPE	29,222	11,642	0,100%	Rifiutata
MSCI NORTH AMERICA	9,923	11,642	1,486%	Accettata
MSCI PACIFIC FREE	7,314	11,642	2,959%	Accettata
MSCI EMERGING MARKETS	29,409	11,642	0,100%	Rifiutata

Secondariamente, si sottopone a test l'ipotesi nulla che gli stessi provengano da una distribuzione normale. Allo scopo, si utilizzano il *Jarque-Bera test* e il *Lilliefors test*. Il primo è un test basato sui momenti, cioè sul raffronto tra i valori campionari di *skewness* e *kurtosis* e i valori attesi per gli stessi parametri in una gaussiana.⁴³ Tale test, anche se estremamente diffuso, è più appropriato in presenza di un campione di dati molto ampio. Il secondo, invece, è fondato sulla comparazione tra la funzione di ripartizione (cosiddetta *cumulative distribution function*) empirica delle osservazioni disponibili e quella di una normale con media e deviazione standard coincidenti con le grandezze campionarie.⁴⁴ I risultati dei test citati, condotti con un livello di significatività pari all'1%, sono riportati in Tabella 4.8 e 4.9.

In effetti, i risultati forniti dai test evidenziano diversi casi in corrispondenza dei quali l'ipotesi di distribuzione gaussiana è smentita. Non va poi dimenticato che la normalità delle singole serie non assicura la normalità a livello multivariato.⁴⁵ Ciò dimostra che, in concreto, dunque, potrebbero esserci degli ulteriori aspetti/proprietà dei mercati non del tutto irrilevanti.

Riprendendo il caso pratico di asset allocation *à la* Markowitz, il prossimo e cruciale *step* da compiere consiste nel "lancio" dell'ottimizzazione. La sua esecuzione, nel caso in esame, conduce all'identificazione delle combinazioni rischio atteso-rendimento atteso dei porta-

⁴³ Il Jarque-Bera test si basa sulla statistica (JB) definita nel modo seguente:

$$JB = T \left[\frac{\hat{S}}{6} + \frac{(\hat{K} - 3)^2}{24} \right]$$

la cui distribuzione asintotica è una Chi-Quadrato con 2 gradi di libertà. Come si ricorderà, i termini \hat{S} e \hat{K} sono i valori campionari di *skewness* e *kurtosis*. Essi assumono, rispettivamente, valore 0 e 3 in una distribuzione normale.

⁴⁴ In sostanza, il Lilliefors test prevede:

- la stima, basata sui dati disponibili, di media e varianza (o deviazione standard);
- la ricerca della massima discrepanza tra l'*empirical distribution function* e la *cumulative distribution function* (cdf) della normale o gaussiana contraddistinta dalla media e dalla varianza (o deviazione standard) precedentemente individuate dai dati;
- la verifica della circostanza o meno che tale massima discrepanza sia sufficientemente ampia da ritenersi statisticamente significativa così da determinare il rigetto dell'ipotesi nulla di distribuzione normale.

⁴⁵ Volendo sottoporre a test l'ipotesi di *joint normality*, si suggerisce l'impiego del Mardia test, descritto sia in Mardia (1970) sia in Doornik e Hansen (1994) e basato sulle misure multivariate di *skewness* e *kurtosis*.

Tabella 4.9 Test Lilliefors sui benchmark selezionati.

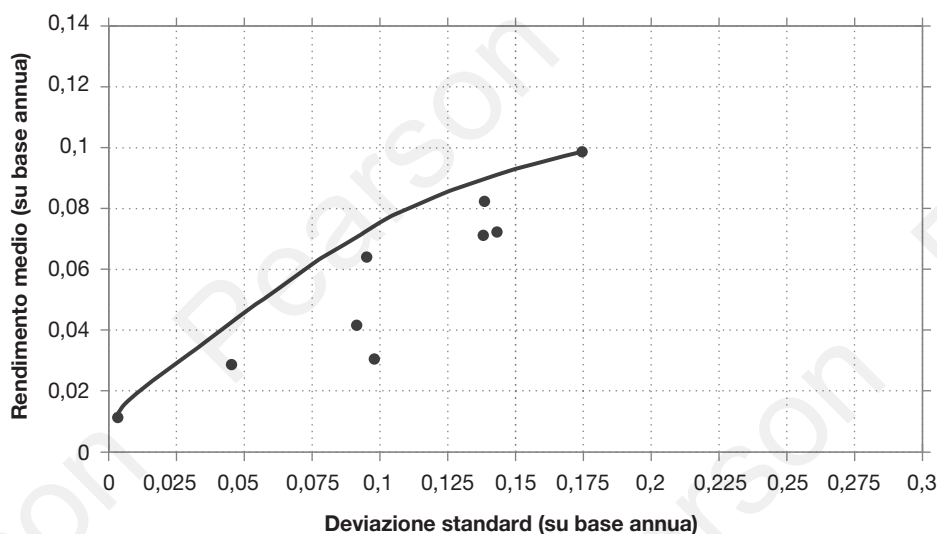
	Statistica Lilliefors	Critical value	P-value	Ipotesi di normalità
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	0,175	0,068	0,100%	Rifiutata
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,070	0,068	0,584%	Rifiutata
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,067	0,068	1,153%	Accettata
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	0,045	0,068	28,910%	Accettata
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	0,054	0,068	9,578%	Accettata
MSCI EUROPE	0,076	0,068	0,187%	Rifiutata
MSCI NORTH AMERICA	0,062	0,068	2,530%	Accettata
MSCI PACIFIC FREE	0,077	0,068	0,162%	Rifiutata
MSCI EMERGING MARKETS	0,052	0,068	11,084%	Accettata

fogli ottimi che descrivono la *mean-variance efficient frontier* disegnata nella Figura 4.2. In essa, si è provveduto a rendere visibile anche il posizionamento delle singole *asset class*.

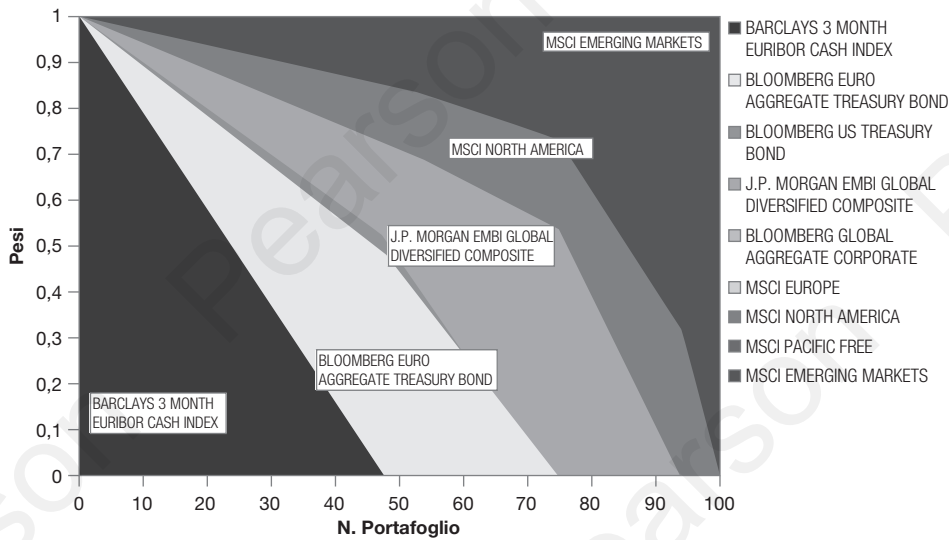
In base alla Figura 4.2, l'asset manager si troverebbe a proporre dei portafogli strategici in grado di presidiare, per quanto riguarda la redditività attesa, un *range* compreso tra l'1,13% e il 9,85% su base annua e, per quanto riguarda il rischio atteso, un *range* di deviazione standard annua compreso tra lo 0,45% e il 17,58%. Con la Figura 4.3, l'attenzione si sposta alla composizione dei portafogli che formano l'*efficient frontier* (in tutto 100).

Di fronte a questa immagine, ritorna immediatamente alla mente l'interrogativo formulato da Michaud (1989) in un suo noto contributo: "*is 'optimized' optimal?*"⁴⁶ In un solo caso (del tutto immaginario), un qualunque soggetto decisore sarebbe disposto ad avanzare una risposta affermativa: se avesse la certezza che i parametri riportati nelle Tabelle 4.4, 4.5 rappresentano esattamente i rendimenti, le volatilità, le covarianze che si

Figura 4.2 Frontiera efficiente di Markowitz e posizionamento delle asset class.



⁴⁶ Michaud (1989).

**Figura 4.3**

La composizione dei portafogli della frontiera efficiente di Markowitz.

materializzeranno, su base annua, nell'*investment period*! In tutti gli altri casi (quelli realistici), egli si troverebbe comprensibilmente in difficoltà nell'accettare i portafogli derivanti dalla MVO come dominanti e migliori rispetto a qualsiasi altro *asset mix*, considerato che la Figura 4.3 offre evidenti riscontri di talune proprietà indesiderabili dei suddetti portafogli denunciate nel precedente Paragrafo 4.3. Difatti, essa mette in evidenza:

- lo scarso grado di diversificazione dei portafogli ottimizzati; ciò è particolarmente vero per quelli con posizione successiva alla 52-esima, i quali coinvolgono non più di tre/quattro *asset class* e, a partire dalla 94-esima posizione, solo due *asset class* (Azionario Nord America e Azionario Paesi Emergenti) dell'universo investibile che include nove *asset class*. Vale la pena aggiungere che nessun portafoglio della *mean-variance efficient frontier* include oltre 6 *asset class*;
- la natura mono-*asset class* del *maximum return (variance) portfolio* il quale è totalmente concentrato sull'indice *MSCI Emerging Markets*, il che rappresenta un motivo sufficiente per sancire l'improponibilità, a livello pratico, di tale portafoglio;
- l'assenza sistematica dalle composizioni *mean-variance efficient* di alcuni indici; è il caso di *MSCI Europe*, di *MSCI Pacific Free* e di *Bloomberg Global Aggregate Corporate*.⁴⁷ L'abbinamento di *MSCI North America* e di *MSCI Emerging Markets* viene preferito dalla MVO rispetto ad una varietà maggiore di *asset class* azionarie in corrispondenza di livelli di tolleranza al rischio superiori perché trae vantaggio da una maggiore stima di redditività associata, nel caso di *MSCI North America*, ad una volatilità inferiore a quella di una componente *equity* esclusa dai portafogli (*MSCI Europe*), e ad una correlazione con *MSCI Emerging Markets* inferiore a quella che caratterizza il legame delle altre potenziali componenti *equity* con i Paesi Emergenti. In corrispondenza, invece, di una più accentuata avversione al rischio, la combinazione rischio-rendimento di *Bloomberg Euro Aggregate Treasury Bond* (4,65%; 2,80%) lo rende preferibile rispetto a *Bloomberg Global Aggregate Corporate* (9,31%; 4,10%) come elemento da affiancare a *MSCI North America*, *MSCI Emerging Markets* ed anche a *J.P. Morgan*

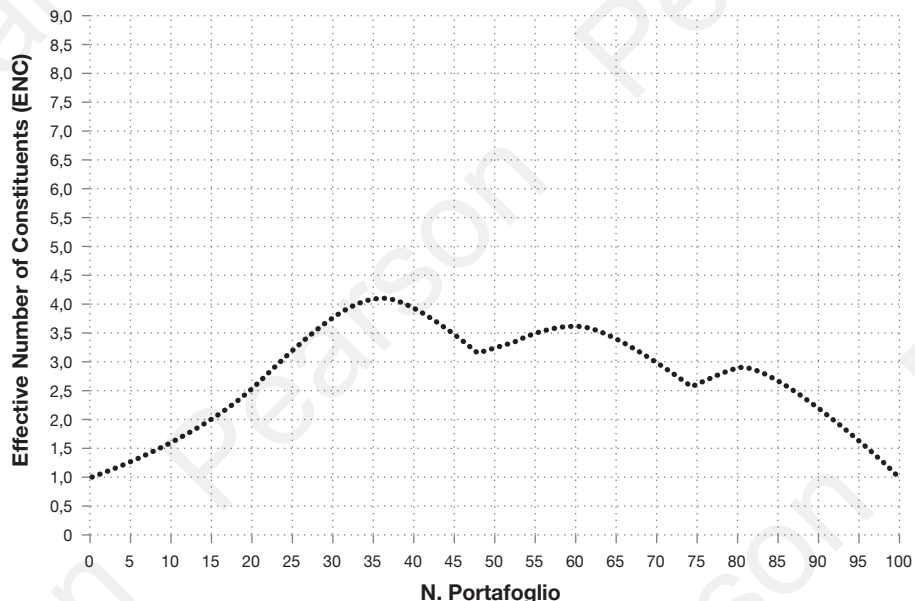
⁴⁷ A dire il vero, l'indice *Bloomberg Global Aggregate Corporate* è previsto nel portafoglio a minima varianza e in quello immediatamente successivo con una esposizione molto marginale, quasi impercettibile, pari rispettivamente allo 0,216% e allo 0,179%.

EMBI Global Diversified Composite; inoltre *Bloomberg Euro Aggregate Treasury Bond* presenta correlazioni, sebbene positive, inferiori con entrambe le *asset class* azionarie privilegiate, nonché con l'indice *J.P. Morgan EMBI Global Diversified Composite* rispetto a quanto accade per l'indice *Bloomberg Global Aggregate Corporate*;

- i mutamenti piuttosto drastici e violenti delle composizioni lungo la frontiera efficiente (ciò è ben visibile osservando la “spigolosità” del grafico ad area in Figura 4.3);
- la natura contro-intuitiva, irragionevole dei portafogli *mean-variance efficient* nella prospettiva del soggetto decisore e/o dell'investitore finale. Per comprendere questa affermazione, è sufficiente formulare un banale interrogativo: quale valore pratico riconoscerebbe un investitore dell'Area Euro a delle proposte di portafogli strategici la cui componente azionaria estromette completamente l'*asset class* Azionario Area Euro? La probabile risposta è “nessuno”.

Alla luce dei commenti appena formulati circa il comportamento dei *portfolio weight* suggeriti dalla MVO, può essere interessante confermare la problematica ben emersa dello scarso grado di diversificazione dei pesi attraverso una misura denominata “*Effective Number of Constituents*” (in breve, *ENC*) attribuibile a Deguest *et al.*⁴⁸ Si tratta di una metrica piuttosto facile da interpretare stante il fatto che assume il valore minimo di 1 in caso di portafoglio massimamente concentrato (come è il caso di un portafoglio mono-asset) e raggiunge il valore massimo di N quando il portafoglio presenta una distribuzione omogenea dei pesi (portafoglio *equally weighted*).⁴⁹ La Figura 4.4 evidenzia chiaramente che, per i 100 portafogli della frontiera efficiente *à la* Markowitz, l'*ENC* si mantiene vistosamente lontana dal valore massimo possibile anche (e questo è ciò che più preoccupa) per i portafogli che compongono la seconda parte della frontiera efficiente, vale a dire per i portafogli dalla 50-esima posizione, non andando mai oltre il valore intermedio, così attestando che i portafogli classici sono ben distanti da una idea di non concentrazione delle *portfolio exposure*.

Figura 4.4
Comportamento dell'*ENC*
per i portafogli della
frontiera efficiente di
Markowitz.



⁴⁸ Deguest (2013).

⁴⁹ La misura denominata *ENC* è così definita: $\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i^2}$. In essa è riconoscibile il reciproco del cosiddetto indice di Herfindahl Hirschman.

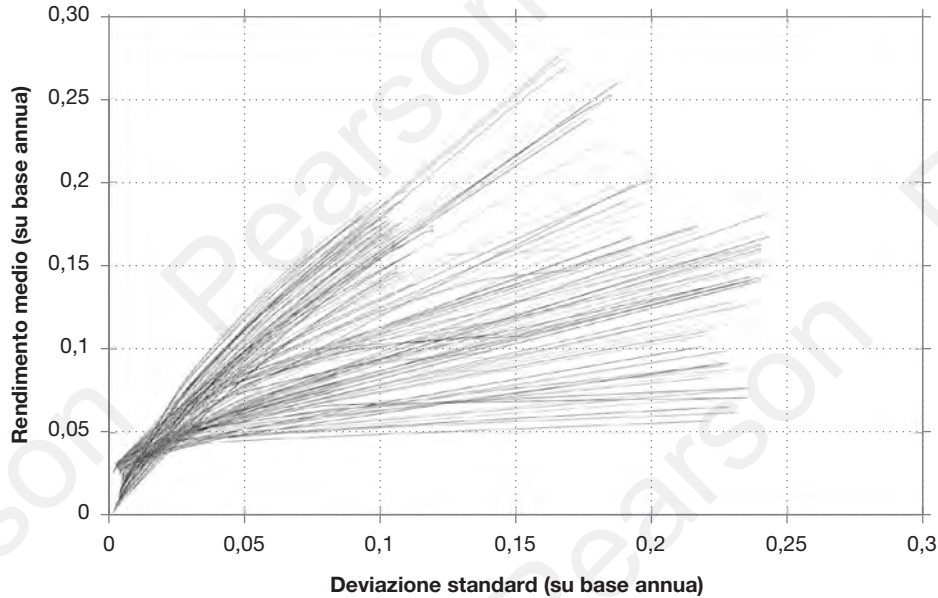


Figura 4.5 L'instabilità della frontiera efficiente storica basata su serie storiche a 5 anni.

Le osservazioni avanzate possono considerarsi una buona sintesi delle implicazioni dello svolgimento di un esercizio di asset allocation strategica in un contesto deterministico in cui ci si affida ciecamente e incautamente a quanto scaturito dalla sequenza passata di performance delle *asset class*. È noto che quest'ultima gode di scarsa forza predittiva soprattutto per i rendimenti attesi. La loro stima, corrispondente alla media campionaria, è poi significativamente influenzata da valori *outlier*. Per sostenere quanto appena detto, può essere utile fornire una evidenza empirica di sicuro impatto. Essa consiste nel mostrare l'estrema erraticità delle combinazioni rischio-rendimento dei portafogli a cui si sarebbe pervenuti utilizzando campioni di dati storici di dimensione costante, ma *rolling*, per la costruzione della frontiera efficiente. Allo scopo, le Figure 4.5 e 4.6 rappresentano le fron-

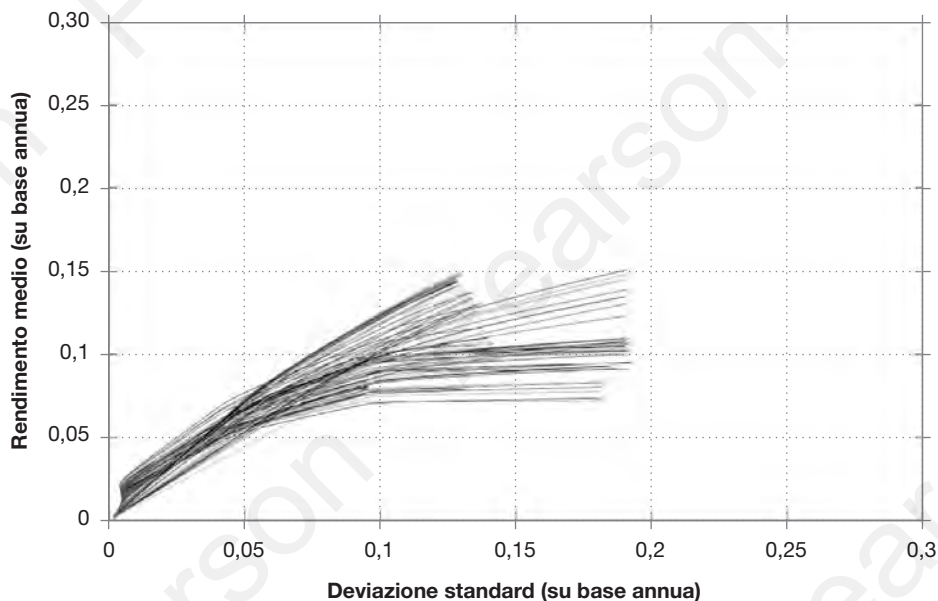
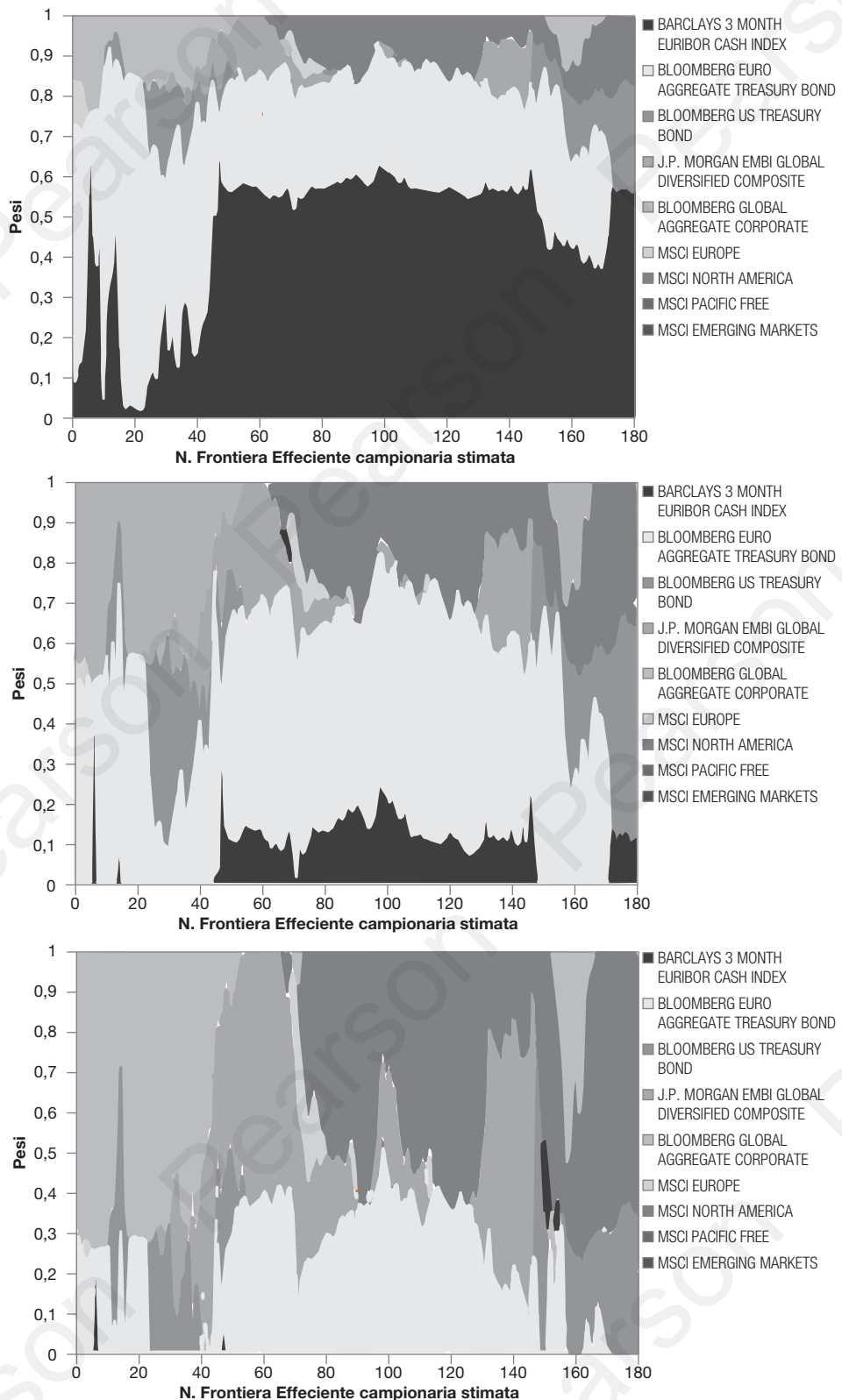


Figura 4.6 L'instabilità della frontiera efficiente storica basata su serie storiche a 12 anni.

Figura 4.7

Composizione, nell'ordine, del 25-esimo, 50-esimo e 75-esimo portafoglio nelle 181 frontiere efficienti "a 5 anni".



riere efficienti stimate con campioni storici di dati mensili relativi a periodi (*rolling*), rispettivamente, di 5 anni e di 12 anni, attinenti alle *asset class* già prima considerate. La disponibilità, nel complesso, di dati mensili relativi all'intervallo gennaio 2003 e dicembre 2022, ha consentito di tracciare, in un caso 181 e, nell'altro caso, 97 frontiere efficienti. È legittimo interpretare la notevole variabilità delle frontiere efficienti storiche, soprattutto per quanto riguarda i rendimenti di portafoglio proposti e soprattutto al ridursi della *sample size*, come un segnale della loro scarsa attendibilità in una prospettiva *out of sample*. Detto in modo più esplicito, le Figure 4.5 e 4.6 costituiscono una prova della non robustezza/non resilienza dei portafogli efficienti classici a scenari differenti da quell'unico scenario storico che li ha determinati, soprattutto se quest'ultimo risulta essere contraddistinto da una estensione temporale limitata.

Un'ulteriore conferma dell'ambiguità dei portafogli ottimi dovuta all'incertezza che affligge gli input stimati può ricavarsi dall'osservazione dell'asset allocation associata ai portafogli che occupano la stessa posizione sulle frontiere efficienti campionarie in precedenza stimate. A mero scopo esemplificativo, se con riferimento a ciascuna delle 181 frontiere efficienti "a 5 anni" rappresentate in Figura 4.5, si esamina la composizione del 25-esimo, del 50-esimo e del 75-esimo portafoglio, non si può fare a meno di constatare, come dimostrato dalla Figura 4.7, quanto siano importanti le differenze in termini di *portfolio weights* e, dunque, l'estremo stravolgimento delle *asset allocation solution* cui si assiste in funzione di una *estimation window* differente, sebbene di pari estensione.

4.5 L'asset allocation strategica e la gestione dell'estimation risk: una descrizione introduttiva

Con l'attività di *asset allocation* strategica, investitori e *asset manager* desiderano pervenire a portafogli stabili, diversificati e finanziariamente efficienti. Sulla base di quanto emerso dal Paragrafo 4.3, tuttavia, è evidente che queste qualità desiderabili sono fortemente minacciate dall'*estimation risk* e, ancor più, dal suo mancato riconoscimento. Pertanto, è indispensabile che l'esplorazione dell'impatto dell'*estimation risk* sia seguita dalla sua gestione.

A tale proposito, si possono identificare due modalità di intervento a cui corrispondono due approcci ben riconoscibili nell'ambito della letteratura di riferimento. In particolare, è ammissibile un'azione sul *model side* e un'azione sull'*estimation side* cui si accompagna la distinzione tra approcci euristici e approcci bayesiani. Rinviano ai paragrafi successivi per un'ampia trattazione e applicazione esemplificativa di entrambi, è bene, in questa sede, porre in risalto la rispettiva idea di fondo.

Gli approcci euristici si propongono di gestire l'*estimation risk* facendo leva sull'intuizione e sul buon senso per identificare dei criteri o dei metodi empirici con i quali agire sul processo di ottimizzazione affinché esso sia sollecitato a produrre maggiore diversificazione. Gli approcci bayesiani, invece, non prevedono alcuna nuova azione circa il processo di ottimizzazione, bensì intervengono sull'input più esposto all'*estimation risk*, ovvero il vettore dei rendimenti attesi. Per il suo ottenimento, essi ritengono ragionevole l'uso di tecniche di stima differenti dall'impiego di medie campionarie ricavate da un *set* di dati storici per giungere a stimatori "migliori". Semplificando, è lecito dire che gli approcci bayesiani considerano preferibile, rispetto all'affidarsi a stime scaturite da un'unica fonte, lo sfruttamento di più fonti informative e la loro "combinazione" in singole stime.

Riflettendo sul diverso modo di incorporare l'*estimation risk* nell'attività di *asset allocation* strategica propria dei diversi approcci, è facile intuire che approcci euristici e bayesiani affondano le proprie radici in due diverse "tradizioni" statistiche (quella frequentista i primi

e, naturalmente, quella bayesiana i secondi), caratterizzate da una differente interpretazione dell'incertezza. Per gli approcci euristici, l'incertezza è provocata dalle realizzazioni aleatorie di una variabile casuale la cui distribuzione di probabilità è però nota. La probabilità di un evento va poi intesa come limite a cui tende la sua frequenza relativa, ossia come frequenza che si riscontra all'aumentare della massa di dati disponibili per effettuare le stime. Diversamente, per gli approcci bayesiani, le distribuzioni esatte di probabilità non sono note e l'incertezza fa riferimento alla valutazione soggettiva del grado di plausibilità degli eventi, la quale è soggetta a modificazioni allorquando nuove informazioni risultano disponibili.

Come anticipato, le pagine successive intendono offrire un'ampia trattazione delle diverse "vie" per la gestione dell'*estimation risk*. Relativamente agli approcci euristici, formeranno oggetto di approfondimento la metodologia degli *additional weight constraint* e quella del *Resampling*. Nell'ambito degli approcci bayesiani, invece, l'attenzione sarà rivolta al modello di Black-Litterman. Al termine di questo inquadramento introduttivo, nonostante la separazione originariamente netta tra le due vie, vale la pena far presente l'opportunità per i *practitioner* di esplorare gli spazi di integrazione tra i due approcci e di pervenire all'impiego di "metodologie composite".

4.6 Il metodo degli *additional weight constraint*

Il metodo degli *additional weight constraint* (vincoli di peso aggiuntivi) è la maniera più istintiva e rudimentale per contrastare gli effetti deleteri dell'*estimation risk*. Esso registra una notevole diffusione tra gli *asset manager*.⁵⁰ Tecnicamente, l'applicazione del metodo avviene attraverso l'integrazione nell'algoritmo di programmazione quadratica avanzato da Markowitz di un set di ulteriori vincoli lineari. Se si indica con Lb_i l'allocazione minima da assegnare all'*asset i* all'interno di un portafoglio (quindi il *lower bound* per i) e con Ub_i la proporzione massima di un portafoglio che può essere investita nel medesimo *asset* (quindi l'*upper bound* per i) e, poi, si riprende l'algoritmo di ottimizzazione, ad esempio nella formulazione (4.3a) presente nel Paragrafo 4.1, quest'ultima subisce la seguente revisione per via del ricorso al metodo in esame:

$$\min_w \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (4.16)$$

sotto i vincoli:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i &= \mu^* \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\ Lb_i \leq w_i &\leq Ub_i \quad \text{con} \quad Lb_i \leq Ub_i \quad \text{e} \quad Lb_i \geq 0, Ub_i \leq 1 \end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui $Lb_i = 0,00$ e $Ub_i = 1,00$, naturalmente, si assiste al ritorno all'originaria *Mean-Variance Optimization* ma, di fatto, non si può allora parlare propriamente di metodo degli *additional weight constraint*. In tutti gli altri casi, quelli realmente "interessanti", emerge invece "l'innovazione" di cui il metodo è portatore, ossia il fatto di imporre un restringimento, una contrazione, dell'intervallo di valori entro il quale possono variare i pesi degli *asset*. Come correttamente osservato da Frost e Savarino, questo modo di agire verrebbe sicuramente percepito come controintuitivo e insensato se il lavoro dell'*asset manager*

⁵⁰ Amenc e Goltz (2011).

dovesse svolgersi in un contesto di certezza, perché equivarrebbe a reprimere le potenzialità dell'ottimizzazione, mentre è destinato a risultare estremamente logico e allettante se si ammette, come è avvenuto in questo e in molti altri contributi, che i parametri stimati per l'ottimizzazione siano soggetti ad incertezza, ad errore.⁵¹ In questo diverso contesto, il metodo degli *additional weight constraint* identifica il proprio bersaglio nella natura irragionevole, polarizzata ed estrema delle composizioni di portafoglio classiche. È chiaro, di conseguenza, che diventi ben accetto agli *asset manager*, perché capace di impedire a un algoritmo alimentato da input di "dubbia qualità" di dispiegare liberamente la propria potenza e di dar sfogo a certi *estimation bias*. In sostanza, essi equiparano il metodo degli *additional weight constraint* a una gradita forma di coercizione per l'algoritmo di Markowitz, finalizzata ad assicurare che esso possa restituire una composizione più variegata dei portafogli ottimali.

Per supportare quanto testé affermato è utile, rifacendosi all'esercizio di asset allocation strategica avviato nel Paragrafo 4.4 e servendosi dei parametri di input allora stimati, proporre un ampliamento di quella esemplificazione che consti dell'applicazione del metodo qui descritto. Allo scopo, si procede, in un primo caso, a riscrivere l'ultimo vincolo previsto dall'algoritmo descritto in (4.16) come indicato dalla disequaglianza (4.17):

$$0 \leq w_i \leq 0,30 \quad (4.17)$$

e, nel secondo caso, in base alla (4.18):

$$0 \leq w_i \leq 0,20 \quad (4.18)$$

L'inserimento nei due casi di un vincolo di *maximum holding* consentito per ciascuna delle 9 *asset class* pari, rispettivamente, al 30% e al 20% delle allocazioni di portafoglio equivale, implicitamente, ad imporre la presenza di un numero minimo di *asset class* in ciascun portafoglio pari, rispettivamente, a 4 e a 5. Le conseguenze sulla composizione dei portafogli ottimi dell'imposizione dei suddetti vincoli individuali sono rese visibili nei nuovi grafici ad area (Figure 4.8 e 4.9).

Le combinazioni rischio-rendimento dei portafogli così ottenuti disegnano, in uno spazio cartesiano di dimensioni $[\sigma_p, \mu_p]$, le frontiere efficienti vincolate (*constrained*) osser-

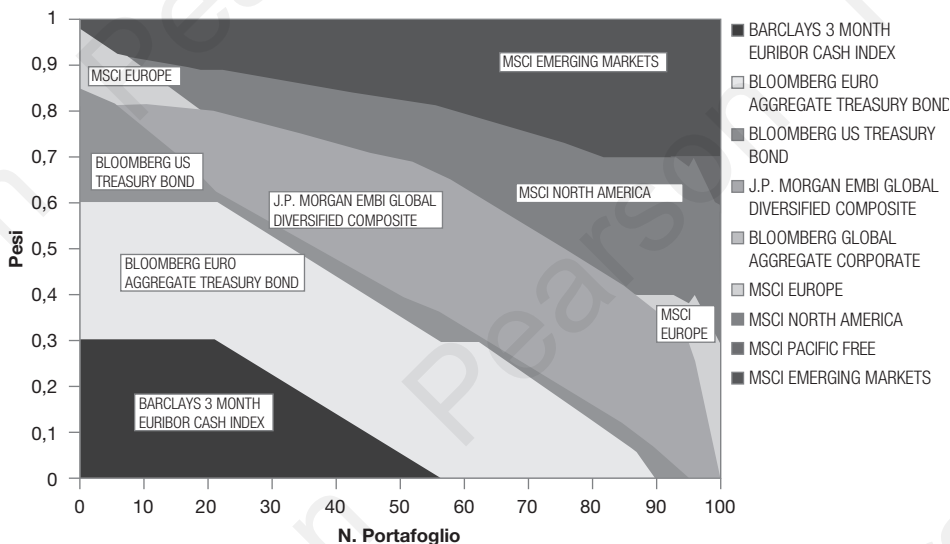


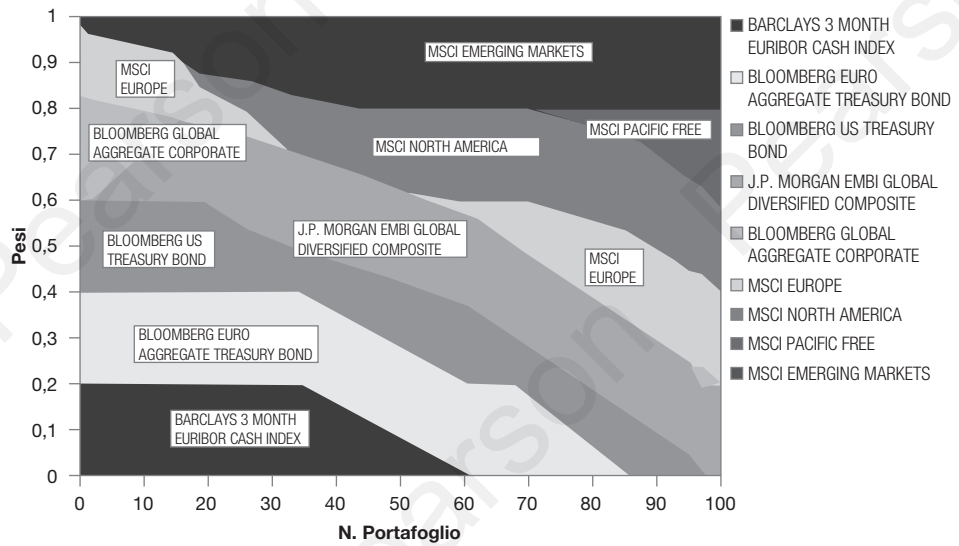
Figura 4.8

La composizione dei portafogli vincolati (maximum holding individuale = 30%).

⁵¹ Frost e Savarino (1988).

Figura 4.9

La composizione dei portafogli vincolati (maximum holding individuale = 20%).



vabili nella Figura 4.10, insieme alla frontiera efficiente classica di Markowitz (*unconstrained*). Nell'insieme, le Figure 4.8, 4.9 e 4.10 permettono di cogliere i vari effetti sui portafogli strategici dell'impiego del metodo degli *additional weight constraint*.

Relativamente alle allocazioni dei portafogli efficienti *constrained*, coerentemente con quanto affermato in precedenza, è possibile innanzitutto notare un incremento dell'effetto diversificazione. Questo cambiamento rispetto ai portafogli classici, comunque percepibile a livello generale, è evidente per i portafogli con numerazione superiore a 50 e risulta ancora più lampante per i portafogli successivi alla 75-esima posizione. Ciò perché, con i

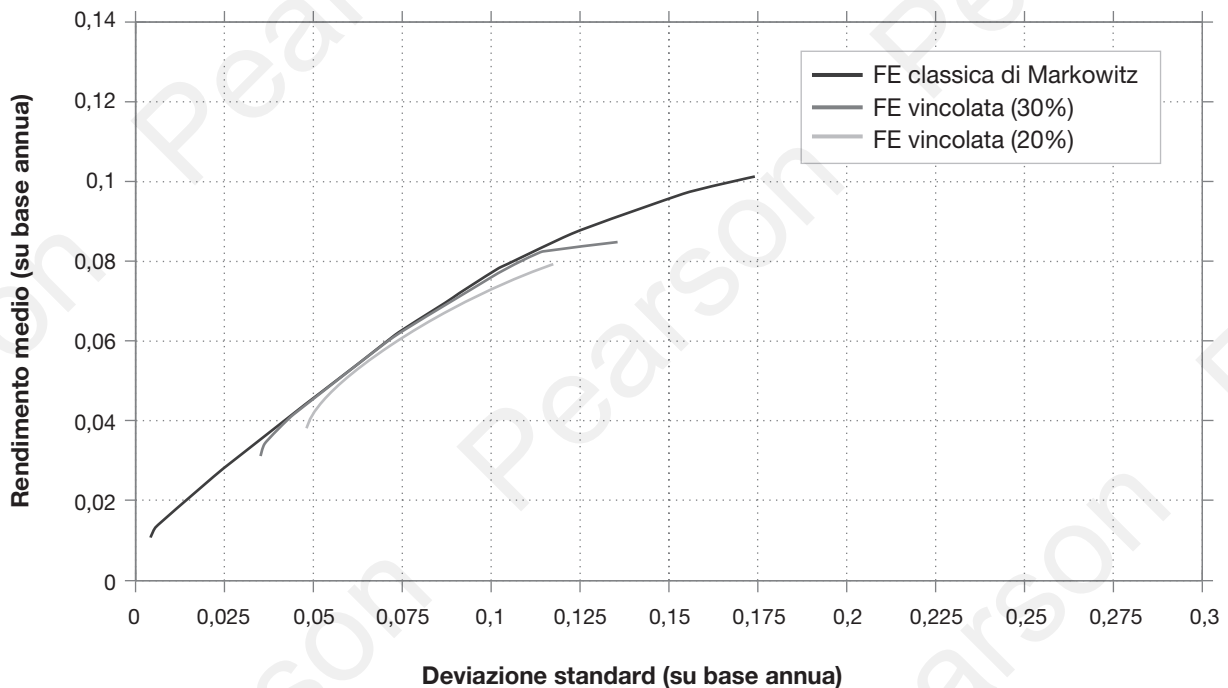


Figura 4.10 Frontiere efficienti vincolate e frontiera efficiente classica.

vincoli introdotti, non è più risultata fattibile e sufficiente l'aggregazione di *J.P. Morgan Embi Global Diversified Composite*, *MSCI North America* e *MSCI Emerging Markets*. Se poi si considerano i portafogli con numerazione molto elevata, approssimativamente dalla 94-esima posizione, la trasformazione è straordinaria. I vincoli introdotti nell'algoritmo di ottimizzazione non consentono più l'accostamento esclusivo di *MSCI North America* e *MSCI Emerging Markets* come accadeva con la tradizionale MVO e impongono l'apertura verso ulteriori componenti azionarie; difatti, si registra l'inclusione di *MSCI Europe* e *MSCI Pacific Free* prima assenti. Va detto che la metodologia utilizzata si oppone alle esposizioni "eccezionali" anche laddove queste riguardano *asset class* per le quali è presumibile una minor esposizione all'*estimation risk*; nell'esemplificazione proposta ciò può dirsi per il *Barclays 3 month Euribor Cash Index*. In virtù degli *additional weight constraint*, quest'ultimo non può conservare il ruolo egemonico che prima gli era riconosciuto nei portafogli classici iniziali (approssimativamente i primi 15/20 in cui il suo peso era oltre il 50%), quelli cioè rappresentativi di proposte di allocazione per soggetti con bassissima tolleranza al rischio. L'impressione, al momento, è dunque che la metodologia utilizzata non sia capace di discriminare tra differenti livelli di intensità del bisogno di diversificazione. Una seconda caratteristica degli *asset mix constrained* a confronto con quelli tradizionali *unconstrained* è rappresentata da una attenuazione del comportamento erratico dei *portfolio weight*.

Se si fa riferimento al posizionamento delle combinazioni $[\sigma_p, \mu_p]$ dei portafogli efficienti vincolati, il metodo qui approfondito è responsabile di due fatti fondamentali. Il primo è la riduzione dell'estensione dell'*opportunity set*. I vincoli uniformi di *maximum holding* introdotti per le *asset class* hanno determinato uno *shift* verso destra del punto di avvio della *constrained efficient frontier* per via, come si ricordava poc'anzi, dell'imponibilità degli originali portafogli esposti in misura preponderante sul Monetario Area Euro. Simultaneamente, essi hanno comportato un punto di arresto della frontiera efficiente vincolata in corrispondenza di un livello di massimo rischio inferiore a quello che caratterizzava la frontiera efficiente classica. Anche in questo caso la spiegazione è semplice: la concentrazione in una sola *asset class* che caratterizzava l'estremità destra della frontiera efficiente *à la* Markowitz non è più possibile; la commistione, a seguito dell'inserimento di ulteriori vincoli, dell'*asset class* prima privilegiata con altre contraddistinte da rischio e rendimento inferiore (quali *MSCI North America*, *MSCI Pacific Free* e *MSCI Europe*) non può evidentemente "surclassare" l'originario portafoglio mono-*asset class*. Il secondo fatto di rilievo è rappresentato dalla collocazione della frontiera efficiente vincolata al di sotto della frontiera efficiente classica. Pertanto, qualunque portafoglio appartenente alla frontiera efficiente vincolata presenta un livello di rendimento inferiore (o al più, talvolta, analogo) a quello di un portafoglio egualmente rischioso che si trova sulla classica *mean-variance efficient frontier*. Questa "distanza" è generalmente indicata come il costo, in termini di rinuncia di performance, della *constrained optimization*. Per evitare di incorrere in un'interpretazione fuorviante e ingannevole, va però sottolineato che si tratta di un indubbio sacrificio di rendimento *in-sample*, quando ciò che conta è la performance *out of sample* dei portafogli! In questa prospettiva, è lecito credere che i portafogli *constrained* abbiano adottato una strategia di "*hedging*" migliore di quanto abbiano fatto i portafogli classici nei confronti dell'*estimation risk*: la migliore diversificazione!

L'indagine del metodo degli *additional weight constraint* finora svolta ha deliberatamente tralasciato una questione non secondaria. Precisamente, si tratta dei criteri secondo i quali determinare i *constraint*. Il motivo è facilmente intuibile: sul tema non si possono avanzare risposte o indicazioni univoche; il metodo si caratterizza evidentemente per ampi margini di soggettività. È sufficiente ripensare all'esemplificazione sviluppata in queste pagine e domandarsi: perché si sono utilizzati *upper bound* del 30% e del 20% e non del 40%, o del 25% o del 15%? Un responso unico è difficile da immaginare! E, qualora l'eser-

cizio fosse stato svolto anche sotto le altre ipotesi di *upper bound* menzionate,⁵² giustamente sarebbe “spuntata” la sensazione di un metodo orientato ad imporre delle soluzioni anziché a derivarle.

Va detto, comunque, che si è registrato un tentativo da parte di Jagannathan e Ma di fornire una base scientifica al ricorso ai *weight constraint* senza giungere ad un criterio rigoroso ed esclusivo per il *design* degli stessi.⁵³ Gli autori citati riconoscono che, matematicamente, un vincolo nella forma di *lower bound* o di *upper bound* sugli *asset weight* produce un aggiustamento, rispettivamente, verso l'alto e verso il basso, dei corrispondenti rendimenti medi proporzionale al connesso moltiplicatore di Lagrange. Al riguardo, essi parlano di uno *shrinkage-like effect*, cioè di un effetto “schiacciamento” indotto dall'imposizione di vincoli ai pesi. Semplificando, si può affermare che, secondo gli autori, l'attivazione dei *weight constraint* implicitamente finisce per modificare le stime dei parametri.

In ogni caso, per coloro che apprezzano la riconoscibilità di solide radici teoriche nei metodi utilizzati, gli spazi di personalizzazione e arbitrarietà concessi da questa metodologia euristica costituiscono verosimilmente motivo di detrimento. Va però detto che gli stessi hanno il merito di permettere un avvicinamento al *modus operandi* degli *asset managers* e di attenuare il timore che essi possono avvertire di veder “usurato” il proprio ruolo dai *tool* quantitativi. Come notato da Eichhorn, Gupta e Stubbs, gli *asset manager* trovano nella fissazione dei vincoli una via per:⁵⁴

- permettere che il processo di costruzione dei portafogli sia influenzato dal differente grado di fiducia che essi nutrono nei confronti dei parametri stimati. In questo caso, *weight constraint* più severi sarebbero applicati alle *asset class* per le quali essi giudicano scarsamente attendibili i momenti statistici stimati (*in primis*, il rendimento atteso);
- far recepire al *tool* di ottimizzazione le preferenze per certe *asset class* anziché altre. In proposito, è utile segnalare che lo strumento dei *weight constraint* potrebbe impedire di estromettere dagli *asset mix* quelle *asset class* con le quali l'*asset manager* e/o gli investitori hanno maggiore familiarità, anche laddove le stesse sarebbero escluse dalla tradizionale *Mean-Variance Optimization*;⁵⁵
- assicurare il rispetto di vincoli esogeni di natura normativa o regolamentare che potrebbero, ad esempio, vietare il superamento di determinate soglie di esposizione verso taluni mercati.

Da questi punti si intravede che la flessibilità di cui gode il metodo degli *additional weight constraint* non si limita alla libertà nella specificazione dei *lower* e *upper bound*, ma concerne anche la libertà nelle logiche di imputazione dei vincoli. In precedenza, per semplicità, si è fatto uso di vincoli individuali che definivano una (in quel caso) identica soglia massima (si poteva prevederne anche una minima) per ciascuna *asset class*, ma per una rappresentazione più esaustiva del metodo in esame è opportuno esplicitare chiaramente la possibilità di procedere anche o in alternativa all'attribuzione di vincoli di gruppo e di vincoli infra-gruppo. I primi identificano la soglia minima o massima che un sotto-insieme di *asset class*, rispetto a quelle selezionate, può assumere nei portafogli. I secondi, invece, definiscono la soglia minima o massima che un'*asset class* può assumere rispetto al peso complessivo del gruppo di appartenenza, così come definito dall'*asset manager*, nei portafogli strategici. Giova segnalare che le due ultime tipologie di vincoli possono rivelarsi

⁵² Per esempio, allo scopo di sperimentare varie soluzioni nel tentativo di contemperare l'interesse per la diversificazione dei portafogli con quello di una non esasperata penalizzazione e riduzione delle combinazioni rischio-rendimento prospettate.

⁵³ Jagannathan e Ma (2003).

⁵⁴ Eichhorn *et al.* (1998).

⁵⁵ È il caso nell'esemplificazione presentata dell'indice *MSCI Europe*.

particolarmente utili nel rispondere a quell'esigenza di graduare l'effetto di diversificazione lungo la frontiera efficiente (*constrained*) che i vincoli individuali (soprattutto se uniformi) difficilmente soddisfano.

Le tre varianti in tema di metodi di imputazione dei vincoli appena definite consentono di proporre di seguito un terzo caso di applicazione del metodo degli *additional weight constraint* utilizzando gli stessi input dei casi precedenti. In dettaglio, la nuova esemplificazione prevede l'impiego di:

- un vincolo individuale che prescrive la presenza, in ciascun portafoglio ottimale, di una esposizione almeno pari al 5% verso l'*asset class* Monetario Area Euro. Esso assume la forma, ben nota, indicata dalla (4.19):

$$0,05 \leq w_{\text{BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX}} \leq 1 \quad (4.19)$$

- un vincolo di gruppo che impone una soglia massima alla presenza delle *asset class* azionarie all'interno di ciascun portafoglio efficiente *constrained* pari al 75%. Esso è espresso formalmente dalla (4.20):

$$0,00 \leq w_{\text{MSCI EUROPE}} + w_{\text{MSCI NORTH AMERICA}} + w_{\text{MSCI PACIFIC FREE}} + w_{\text{MSCI EMERGING MARKETS}} \leq 0,75 \quad (4.20)$$

- quattro vincoli infra-gruppo. Il primo di essi vuole assicurare una incidenza dell'Obbligazionario Corporate Globale sull'esposizione obbligazionaria dei portafogli ottimizzati non inferiore al 10%. Il secondo vincolo dispone che l'Obbligazionario Governativo Paesi Emergenti non possa assumere una incidenza superiore al 10% della componente *bond* dei portafogli. Il terzo vincolo prevede che l'Azionario Paesi Emergenti non possa costituire oltre il 15% della componente *equity* dei portafogli. L'ultimo intende imporre una influenza almeno pari al 25% della componente *equity* a favore dell'Azionario Europa. Questi vincoli infra-gruppo sono tradotti formalmente dalle seguenti disequaglianze (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24).

$$0,10 \leq \frac{w_{\text{BLOOMBERG GLOB. AGG. CORP.}}}{w_{\text{BLOOMBERG GLOB. AGG. CORP.}} + w_{\text{JPM EMBI GLOB. DIV. COMP.}} + w_{\text{BLOOMBERG US TREAS. BOND}} + w_{\text{BLOOMBERG EURO AGG. TREAS. BOND}}} \leq 1 \quad (4.21)$$

$$0,00 \leq \frac{w_{\text{J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED}}}{w_{\text{BLOOMBERG GLOB. AGG. CORP.}} + w_{\text{JPM EMBI GLOB. DIV. COMP.}} + w_{\text{BLOOMBERG US TREAS. BOND}} + w_{\text{BLOOMBERG EURO AGG. TREAS. BOND}}} \leq 0,10 \quad (4.22)$$

$$0,00 \leq \frac{w_{\text{MSCI EMERGING MARKETS}}}{w_{\text{MSCI EUROPE}} + w_{\text{MSCI NORTH AMERICA}} + w_{\text{MSCI PACIFIC FREE}} + w_{\text{MSCI EMERGING MARKETS}}} \leq 0,15 \quad (4.23)$$

$$0,25 \leq \frac{w_{\text{MSCI EUROPE}}}{w_{\text{MSCI EUROPE}} + w_{\text{MSCI NORTH AMERICA}} + w_{\text{MSCI PACIFIC FREE}} + w_{\text{MSCI EMERGING MARKETS}}} \leq 1 \quad (4.24)$$

In sintesi, la terza esemplificazione riguardante il metodo degli *additional weight constraint* propone un esercizio di asset allocation strategica nell'ambito del quale, attraverso l'inserimento di vincoli individuali, di gruppo e infra-gruppo, si vuole assicurare la presenza, in ciascuna strategia di investimento, di una componente minima di risparmio precauzionale ed estremamente liquido e rinunciare ad esasperare l'aggressività delle proposte di investimento prevenendo soluzioni *all equity*. Inoltre, si vuole considerare la familiarità e la consuetudine maturata dagli investitori con talune *asset class* di investimento tali da farle percepire come un punto di "ancoraggio" per il proprio portafoglio finanziario (si veda il vincolo nella 4.24) e limitare, invece, sulla base della loro capitalizzazione relativamente ad altre *asset class* della stessa natura, l'impegno verso categorie meno comuni, a cui gli investitori sono meno avvezzi e per le quali anche l'attività di ricerca ed analisi può incontrare difficoltà maggiori. Quest'ultima parte dell'enunciato accenna al criterio che ha ispi-

rato la scrittura del vincolo nella (4.23) e che ora merita qualche attenzione maggiore. In questo caso, l’upper bound (15%) del vincolo infra-gruppo è stato fissato sottraendo approssimativamente un 2,5% al market capitalization value relativo dell’indice MSCI Emerging Markets rispetto al market capitalization value di tutte le asset class azionarie a fine dicembre 2022. Questo modo di procedere ha tratto spunto da Grauer e Shen, i quali suggeriscono di definire il campo di variazione di una asset class all’interno di un risky group aggiungendo e/o sottraendo una quantità (arbitraria) c al target-weight constraint ($w_{target,i}$) rappresentato, secondo gli autori, dalla proporzione della capitalizzazione di mercato riferibile a quell’asset class rispetto a quella cumulata dal risky group di appartenenza.⁵⁶ Secondo questa impostazione, un lower bound e un upper bound per l’asset class i nell’ambito di un vincolo infra-gruppo sono definiti, rispettivamente, nel modo seguente:

$$Lb_i = \max(0, -c + w_{target,i}) \tag{4.25}$$

$$Ub_i = \min(1, c + w_{target,i}) \tag{4.26}$$

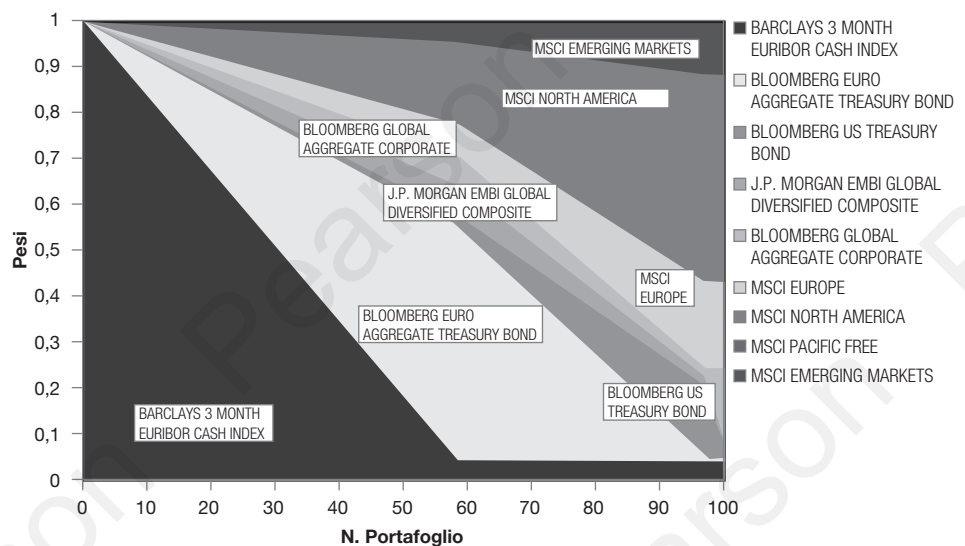
Il vincolo infra-gruppo, invece, assume analiticamente e in generale la veste riportata nella (4.27):

$$Lb_i \leq \frac{w_i}{w_{Risky\ group\ di\ appartenenza}} \leq Ub_i \tag{4.27}$$

L’attenzione per la proposta di Grauer e Shen è dettata dalla riconoscibilità di una sua forte coerenza con uno dei risultati centrali del noto modello di equilibrio del Capital Asset Pricing Model (CAPM), secondo il quale un investitore razionale dovrebbe detenere tutti gli asset rischiosi proporzionalmente al loro market capitalization value. Ciò è utile per comprendere che, sostanzialmente, nella formulazione presentata degli upper e lower bound, la quantità c sarà ragionevolmente tanto più prossima ad un valore nullo quanto minore è il grado di attendibilità che l’asset manager riconosce ai propri input.

Avendo completato l’illustrazione degli additional weight constraint previsti dalla terza esemplificazione, non rimane che rivolgere l’attenzione alla composizione e alla combinazione rischio-rendimento dei portafogli efficienti che da essi discendono. Esse possono essere osservate, rispettivamente, nelle Figure 4.11 e 4.12.

Figura 4.11
La composizione dei portafogli constrained ottenuti con vincoli individuali, di gruppo e infra-gruppo.



⁵⁶ Grauer e Shen (1999).

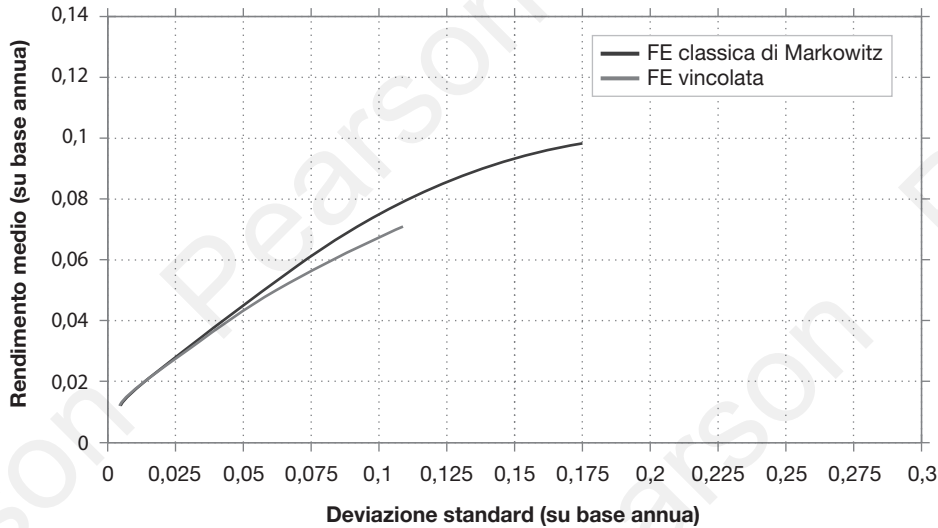


Figura 4.12 Frontiera efficiente constrained (con vincoli individuali, di gruppo e infra-gruppo) e frontiera efficiente classica.

In una prospettiva di confronto con le prime due applicazioni, gli aspetti “originali” e rilevanti che emergono nitidamente da questa ulteriore applicazione possono riassumersi:

- nella graduale progressione verso portafogli che non ammettono esposizioni palesemente preponderanti verso talune *asset class* via via che si “percorre” la frontiera efficiente da sinistra verso destra. Ciò non avviene più in modo uniforme lungo il suo tracciato, come riscontrato con l’impiego esclusivo di vincoli individuali omogenei;
- nell’assenza di un vistoso *shift* verso destra del punto di avvio della frontiera efficiente *constrained* rispetto a quella classica. Si è dunque preservata la possibilità di rivolgersi anche ad investitori estremamente avversi al rischio.

Va da sé che, per entrambi i fronti, il merito va all’aver determinato, con l’uso congiunto di diverse logiche di imputazione dei *weight constraint*, una ricerca della diversificazione più disciplinata e più consapevole.

4.7 Il metodo del resampling

Il metodo del *Resampling* co-inventato da Richard Michaud e Robert Michaud⁵⁷ si propone di migliorare l’ottimizzazione *à la* Markowitz prevedendo l’introduzione delle simulazioni Monte Carlo nel processo di *portfolio construction* allo scopo di riflettere in maniera concreta e visibile l’incertezza annessa ai parametri stimati ed evitare un loro uso “letterale”.⁵⁸ In tal senso, risulta decisiva la capacità delle simulazioni Monte Carlo di generare ulteriori sentieri casuali di rendimenti per le *asset class* rispetto a quell’unico sentiero che la storia ha consentito di osservare e sul quale si fondano le stime campionarie degli input. Ciò consente, infatti, al *Resampling* di “far passare” una “concezione” stocastica, anziché deterministica, della *portfolio efficiency*.

⁵⁷ La procedura di seguito descritta forma oggetto di brevetto dal dicembre 1999 (*US patent* 6,003,018) con il titolo “Portfolio Optimization by Means of Resampled Efficient Frontier” riconosciuto a Richard e Robert Michaud. I diritti di *licensing* sono concessi esclusivamente a New Frontier Advisors LLC, Boston, USA.

⁵⁸ Michaud e Michaud (2008).

Passando a una rappresentazione dettagliata del *Resampling*, è bene evidenziare che la metodologia richiede di svolgere la sequenza di azioni descritta di seguito:

1. stimare $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ usando T osservazioni di rendimento storico per ciascuna *asset class*, ovvero predisporre gli input per la classica *portfolio optimization*;
2. determinare la tradizionale frontiera efficiente di Markowitz composta di M portafogli a partire dal *minimum return (variance) portfolio* fino a giungere al *maximum return (variance) portfolio*. A ciascun portafoglio è assegnato un indice di posizione o *rank* k ($k = 1, \dots, M$);
3. creare, mediante *Resampling* (ricampionamento), un nuovo *data set*. Più precisamente, è richiesto di simulare contemporaneamente un sentiero casuale di rendimenti di lunghezza L per ciascuna *asset class* mediante L estrazioni da una distribuzione normale multivariata con vettore delle medie $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ e matrice di covarianza $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ stimati nel primo *step*. Generalmente L coincide con T ;
4. calcolare, sulla base delle serie simulate, un nuovo *set* di input per l'ottimizzazione ($\hat{\boldsymbol{\mu}}_{SIM1}$; $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{SIM1}$);
5. determinare, utilizzando ($\hat{\boldsymbol{\mu}}_{SIM1}$; $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{SIM1}$), una nuova frontiera efficiente e, quindi, la sequenza dei portafogli ottimi secondo il nuovo *set* di input stimati. Tale frontiera efficiente è detta, indifferentemente, frontiera efficiente simulata (*simulated efficient frontier*) o frontiera efficiente statisticamente equivalente (*statistically equivalent efficient frontier*) e può essere identificata in simboli con FE_{SIM1} ;
6. ripetere gli *step* da 3) a 5) un numero H elevato di volte. La loro reiterazione consente, in primo luogo, di ottenere, complessivamente, H nuovi *set* di *optimization input* (da $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{SIM1}$; $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{SIM1}$ a $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{SIMH}$; $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{SIMH}$) e altrettante frontiere efficienti simulate o frontiere efficienti statisticamente equivalenti (da FE_{SIM1} a FE_{SIMH}), ciascuna delle quali accoglie M portafogli;
7. associare un portafoglio della frontiera efficiente classica a ciascuno degli M portafogli presenti in ciascuna delle H frontiere efficienti simulate. In proposito, si parla di *rank associated portfolio* perché l'abbinamento è fondato sull'identità del numero di posizione occupata dai portafogli simulati e da quelli classici, considerato che sia gli uni sia gli altri sono distribuiti sulla frontiera efficiente di appartenenza in modo tale da risultare equidistanti per rendimento;
8. effettuare, per ciascuno degli M portafogli con identico *rank* presenti nelle H frontiere efficienti simulate, il calcolo della media del peso assegnato a ciascuna delle N *asset class*. In tal modo si perviene alla definizione della composizione di M portafogli ricampionati o *resampled*;
9. calcolare, servendosi degli input classici ($\hat{\boldsymbol{\mu}}$; $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$), la combinazione rischio-rendimento da associare a ciascuno degli M portafogli efficienti ricampionati o *resampled*;
10. rappresentare, nello spazio rischio-rendimento, la *resampled efficient frontier (REF)* o frontiera efficiente ricampionata intesa come *set* o sequenza degli M portafogli ricampionati o *resampled*.

Una lettura attenta degli *step* appena descritti permette, in definitiva, di convergere sulla seguente esposizione, in termini essenziali, dell'idea di fondo del *Resampling*: l'attività di *portfolio construction* dovrebbe non solo rendere manifesto e visibile il livello di *randomness* degli input (impegno assolto dalle frontiere efficienti simulate), ma anche giungere a sfruttare tale incertezza considerando la conseguente maggiore dispersione ed erraticità dei vettori delle allocazioni attraverso il meccanismo dell'*averaging* dei pesi dei *rank associated portfolio* per arrivare a proporre composizioni finali meno estreme.

4.7.1 Un esempio di applicazione del resampling

Il presente paragrafo intende offrire, a titolo esemplificativo, un'applicazione della procedura del *resampling*. A tal fine è bene premettere che, ancora una volta, gli input classici saranno rappresentati dalle stime campionarie condotte nel Paragrafo 4.4 e sintetizzate nelle Tabelle 4.4, 4.5 e 4.6.

Poiché nei suoi step iniziali, la procedura del *resampling* è chiaramente orientata a porre in evidenza l'influenza dell'*estimation error* nel rendere ambigui gli *optimal portfolio*, l'applicazione qui proposta non può che prendere avvio con la generazione delle frontiere efficienti statisticamente equivalenti. Per questo si è ripetuto, per un numero di volte pari a 500, la simulazione di sentieri casuali di 240 osservazioni mensili per le 9 *asset class* incluse nell'"universo investibile" estraendoli da una distribuzione normale multivariata $N(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$. Ciò ha consentito di ricavare i 500 nuovi set di input per l'ottimizzazione con i quali effettuare il computo delle 500 frontiere efficienti simulate (ciascuna composta di 100 portafogli) rappresentate nella Figura 4.13. In effetti, il loro tracciato nello spazio rischio-rendimento appare come una prova inconfutabile della nebulosità del concetto di *mean-variance optimality*: talune frontiere efficienti simulate non giungono a presidiare il range di rischio della frontiera originaria, altre lo oltrepassano visibilmente; il range di rendimento osservato è ancor più ampio estendendosi da un valore attorno all'1% fino a valori prossimi o anche lievemente superiori al 22%-23% per le frontiere efficienti simulate a fronte di un range 1,13%-9,85% per la frontiera originaria.

La visualizzazione dell'impatto dell'*estimation error* può essere resa ancor più incisiva e marcata affiancando alla rappresentazione delle frontiere efficienti simulate, quella della regione statisticamente equivalente (*statistical equivalence region*). Ciò è possibile valutando il rendimento medio e la deviazione standard associabile al vettore dei pesi di ognuno dei portafogli presenti su ciascuna frontiera efficiente simulata sulla base degli input originari e, dunque, interpretando quel vettore come un set di *statistically equivalent weight*.

Per effetto di questo procedimento, la regione statisticamente equivalente si presenta nella Figura 4.14 come un'area "popolata" da 50.000 portafogli (100×500) che giacciono al di sotto della frontiera efficiente classica. La loro dispersione rispetto a quest'ultima aumenta muovendosi dalla parte inferiore verso la parte superiore della frontiera efficiente ovvero procedendo da sinistra verso destra. La circostanza riscontrata può ritenersi coe-

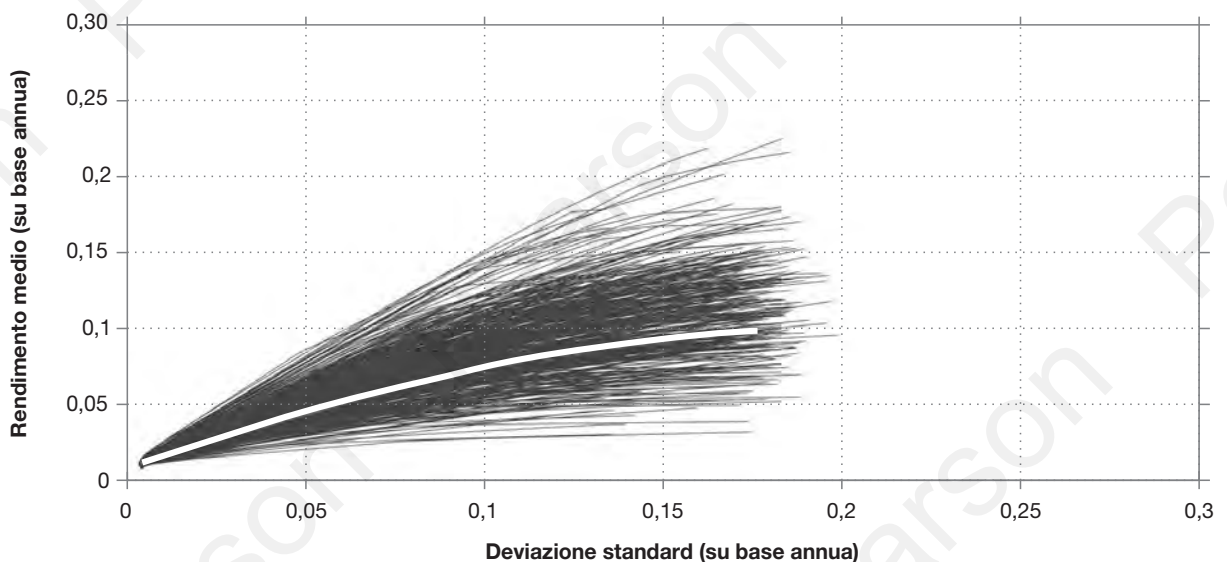
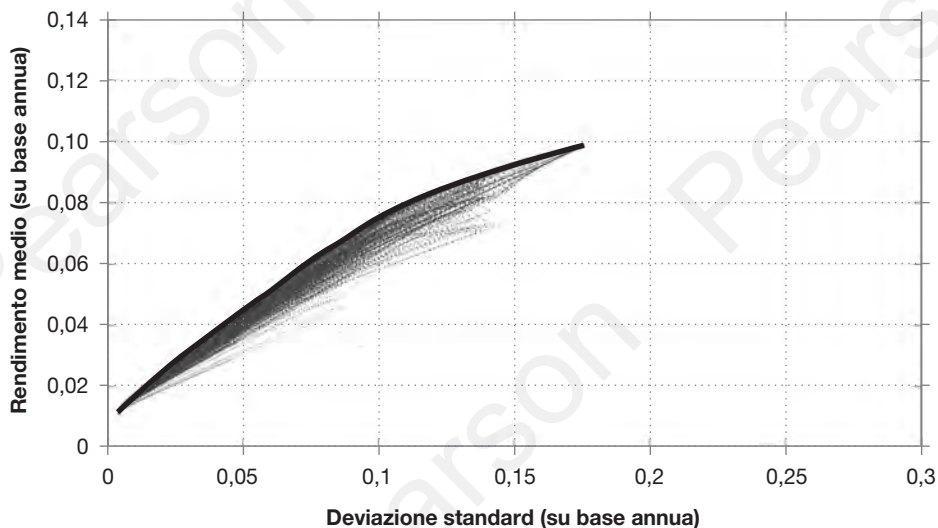


Figura 4.13 Frontiera efficiente classica e 500 frontiere efficienti simulate o statisticamente equivalenti.

Figura 4.14 Frontiera efficiente classica e regione statisticamente equivalente.



rente con l'idea che l'*estimation risk* affligga maggiormente i portafogli intermedi ed estremi rispetto a quelli a basso rischio.

A questo punto della concreta applicazione della procedura del *resampling* è naturale avvertire l'esigenza di sfruttare l'incertezza connessa allo *status* di portafogli ottimi dei portafogli *mean-variance efficient* resa evidente sia dalla Figura 4.13 sia dalla Figura 4.14 per giungere a dei portafogli ragionevoli e proponibili. Ciò equivale a chiedersi come convertire le *simulated efficient frontier* in una singola frontiera efficiente e, dunque, come pervenire ad un unico *opportunity set* che non trascuri l'*information uncertainty*. Se si considera che le frontiere efficienti simulate sono ugualmente probabili e che ciascuna frontiera efficiente simulata esprime i corretti *asset mix* per un dato set di *simulated input*, non sorprende che l'identificazione di una nuova ed unica frontiera efficiente ricampionata o *resampled* avvenga, come suggerito dal punto 8 della sequenza del *resampling*, attraverso la media dei vettori dei pesi dei *rank associated portfolio*. L'applicazione qui proposta prosegue, dunque, con il calcolo della (4.28):

$$\mathbf{w}_k^{\text{resampled}} = \frac{1}{500} \sum_{h=1}^{500} \mathbf{w}_{h,k} \quad (4.28)$$

che conduce alla determinazione del vettore delle allocazioni del k-esimo portafoglio ricampionato ($w_k^{\text{resampled}}$) come media del vettore dei pesi del portafoglio di posizione k (w_k) presente nelle 500 frontiere efficienti simulate. Le composizioni dei portafogli *resampled* così ottenuti possono essere osservate nella Figura 4.15. Di fronte a tale immagine non si può fare a meno di notare come il ricorso alle simulazioni Monte Carlo da parte del *resampling* sia riuscito nell'obiettivo di "domare" l'eccessiva potenza (se rapportata alla qualità degli input) dell'ottimizzazione classica di Markowitz, restituendo portafogli caratterizzati da un maggior grado di diversificazione e da *shifts* meno improvvisi nelle allocazioni di portafoglio al variare del rendimento rispetto a quanto riscontrato con l'esame dei classici portafogli *mean-variance efficient*. Entrambi gli aspetti saranno ripresi nel successivo Paragrafo 4.7.2. In questa sede, è sufficiente segnalare che gli indici estromessi dal modello tradizionale di Markowitz (*MSCI Europe*, *MSCI Pacific Free* e *Bloomberg Global Aggregate Corporate*) risultano presenti nei 100 portafogli ricampionati con *allocation weight* mediamente pari, rispettivamente, a 4,43%, 3,45% e 0,86%. Negli stessi portafogli si registra, per la componente *bond*, un campo di variazione tra il 99,29% e

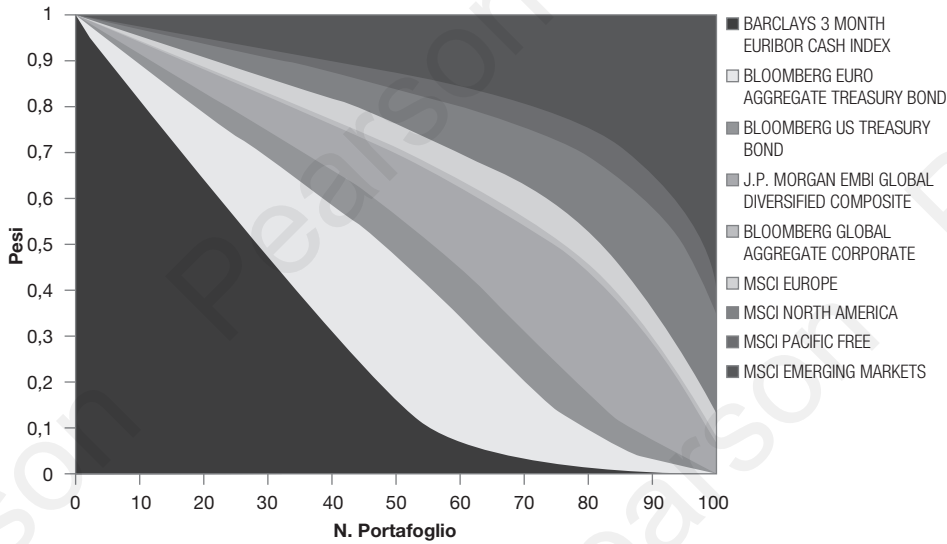


Figura 4.15
La composizione dei portafogli della Resampled Efficient Frontier (REF).

l'8,20% e, corrispondentemente, per la componente *equity*, un range tra lo 0,71% e il 91,80%; in nessun caso, tuttavia, la sua realizzazione risulta esclusivamente rimessa a *MSCI Emerging Markets* come accadeva nell'approccio classico.

Le combinazioni rischio atteso/rendimento atteso dei portafogli *resampled* sono rappresentate nella Figura 4.16 insieme a quelle dei portafogli tradizionali. È evidente la collocazione della *Resampled Efficient Frontier* al di sotto della frontiera efficiente classica. Al riguardo, è bene ribadire che la posizione di inferiorità della *REF* è riconducibile alla valutazione dei portafogli che la definiscono mediante gli input campionari. Si tratta, dunque,

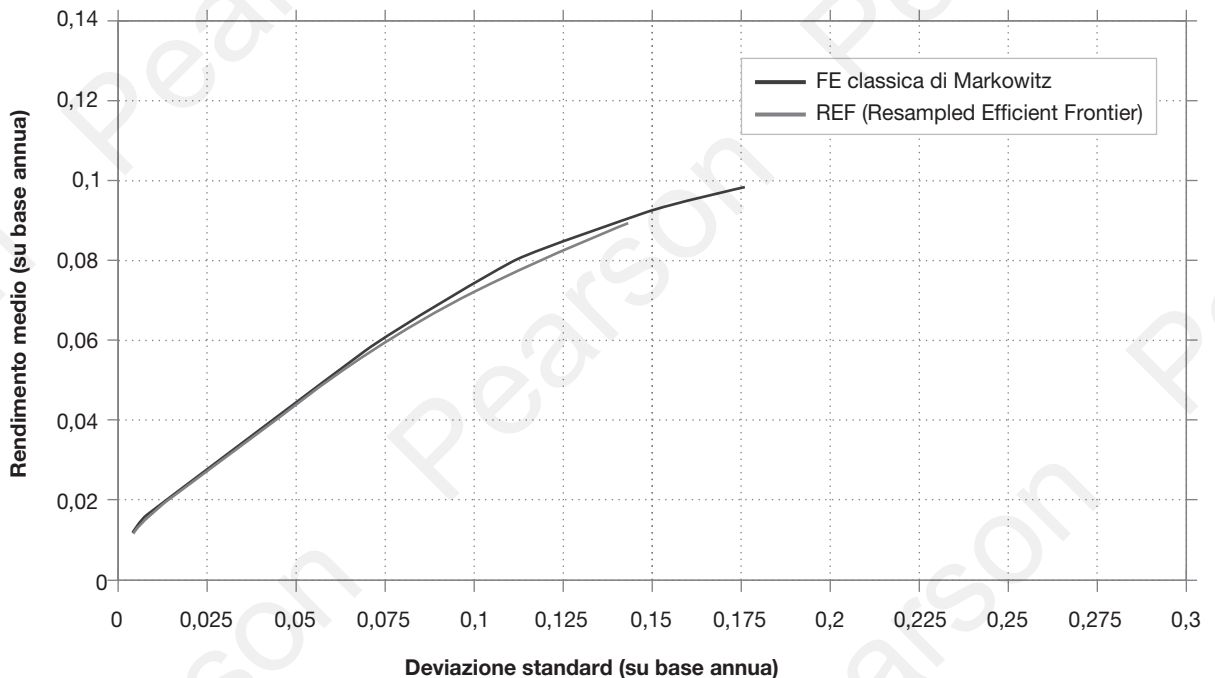


Figura 4.16 Frontiera efficiente ricampionata o Resampled Efficient Frontier (REF) e frontiera efficiente classica.

di una condizione di subordinazione *in sample*; in una prospettiva *out of sample*, il set di portafogli rappresentativo della *Resampled Efficient Frontier* fornisce alternative di investimento più appropriate rispetto alla *Markowitz's efficient frontier* per coloro che non riconoscono un livello di probabilità pari al 100% alle proprie stime. Nella Figura 4.16 è anche osservabile una circostanza molto ricorrente con il *resampling*, ovvero il restringimento del range di rischio abbinato ai portafogli *resampled*. La frontiera efficiente ricampionata è, infatti, contraddistinta da un livello massimo di deviazione standard inferiore rispetto a quello raggiunto dalla frontiera efficiente classica (14,35% *versus* 17,58%). Ciò è dovuto alla maggiore diversificazione dei portafogli ricampionati (ottenuta conducendo un'attività di *portfolio optimization* in un contesto di incertezza) che, valutata sulla base degli input originari, non permette di raggiungere, con incrementi di rendimento, il livello di rischio corrispondente alla soluzione dell'investimento al 100% nell'*asset class* a più alto rendimento (*MSCI Emerging Markets*) come accadeva con la *Mean-Variance Optimization* tradizionale.

4.7.2 L'analisi delle proprietà dei portafogli ricampionati

Il presente paragrafo si propone, riprendendo e ampliando quanto già emerso in sede di applicazione del *resampling*, di effettuare un esame dettagliato dei tratti distintivi dei portafogli ricampionati. Avendo introdotto la metodologia come una via per la gestione dell'*estimation risk*, è ragionevole dare spazio, in prima battuta, alle proprietà desiderabili dei suddetti portafogli. In tal senso, va rammentato che il *resampling* genera portafogli:

- con un livello maggiore di diversificazione;
- con una *smooth transition* nel vettore delle allocazioni all'aumentare del rischio.

Sul primo punto, come conseguenza del fatto che «... *the REF is based on averages of all properly associated optimal portfolios on the simulated MV efficient frontiers*»,⁵⁹ è naturale l'inclusione nei vettori dei pesi dei portafogli ricampionati di un numero più elevato di *asset class*. La propensione del *resampling* per una maggiore inclusività verso i componenti dell'universo investibile, nonché per il "calmieramento" di posizioni assai concentrate dove le stesse apparirebbero più ardite e "sfacciate", ovvero in corrispondenza della sezione più verso destra della frontiera efficiente, può essere dedotta anche dal raffronto tra la metrica ENC introdotta nel Paragrafo 4.4 calcolata per i portafogli della frontiera efficiente classica e per i portafogli ricampionati. Dalla Figura 4.17, sono difatti evidenti i valori superiori della ENC per i portafogli ricampionati collocati in quella zona dell'*opportunity set*.

Coerentemente con quanto appena affermato, può essere interessante verificare puntualmente che il grado di disomogeneità tra la composizione dei portafogli ricampionati e quella dei corrispondenti portafogli classici si accentua percorrendo verso destra il tracciato delle rispettive frontiere efficienti. A scopo esemplificativo, nella Tabella 4.10 è riportata la composizione del primo, del cinquantesimo e dell'ultimo portafoglio appartenenti sia alla frontiera efficiente ricampionata sia a quella classica. In effetti, le differenze delle composizioni ottimali risultano più pronunciate per il 50-esimo e il 100-esimo portafoglio. Per entrambi, la *REF* dà prova di raccomandare delle "scommesse" più moderate sulle singole *asset class* e, in generale, pesi meno estremi.

Passando all'aspetto della transizione graduale dei pesi da un'*asset class* all'altra, occorre riconoscere che esso merita apprezzamento per il fatto di rendere i portafogli ottimi più ragionevoli e, dunque, più proponibili e maggiormente dotati di un significato pratico. L'assenza di bruschi mutamenti è spiegata dalla minore dipendenza dei portafogli da uno specifico set di input. Ciò, a sua volta, discende dal processo di mediazione dei pesi dei portafogli

⁵⁹ Michaud e Michaud (2008).

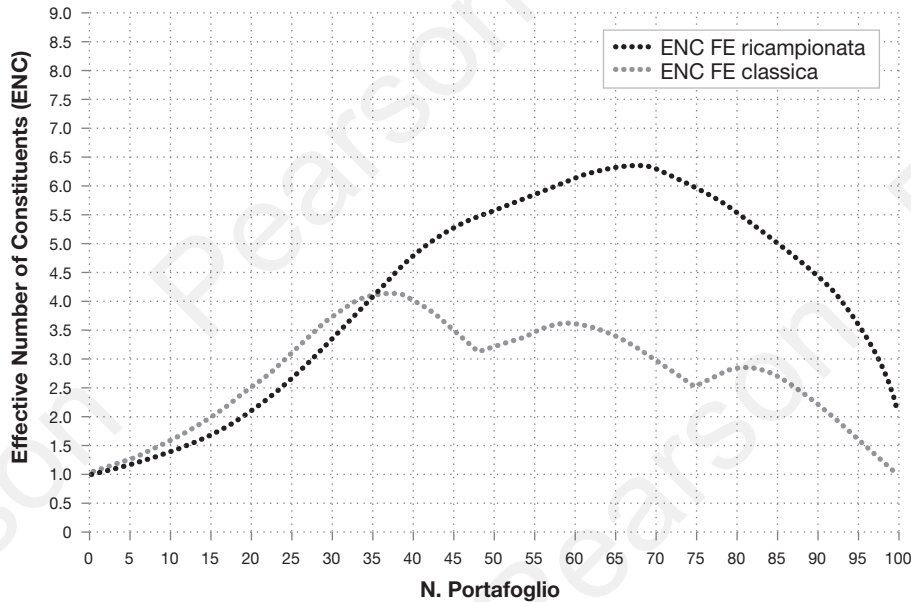


Figura 4.17 Confronto della metrica ENC per la frontiera efficiente classica e la frontiera efficiente ricampionata.

con stesso *rank* appartenenti alle frontiere efficienti simulate in quanto, oltre ad assicurare la somma unitaria dei pesi dei portafogli ricampionati, ha l'effetto di rendere questi ultimi robusti e stabili e non più ipersensibili a fronte di lievi modifiche nelle stime campionarie.

Accanto ai punti di forza appena trattati, Scherer associa ai portafogli ricampionati anche delle caratteristiche non gradite.⁶⁰ Queste includono, in primo luogo, la possibile violazione ad opera del *resampling* di un requisito di base di un set di portafogli proposti

Tabella 4.10 Asset allocation della frontiera efficiente classica e della Resampled Efficient Frontier a confronto.

	PORTAFOGLIO 1		PORTAFOGLIO 50		PORTAFOGLIO 100	
	REF	FE classica	REF	FE classica	REF	FE classica
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	98,868%	99,088%	16,361%	0,000%	0,000%	0,000%
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,153%	0,000%	31,764%	46,009%	0,200%	0,000%
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,017%	0,000%	9,387%	1,900%	0,800%	0,000%
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	0,004%	0,000%	13,097%	23,893%	7,000%	0,000%
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	0,253%	0,216%	0,911%	0,000%	0,200%	0,000%
MSCI EUROPE	0,092%	0,000%	5,013%	0,000%	4,600%	0,000%
MSCI NORTH AMERICA	0,537%	0,697%	8,046%	12,485%	21,000%	0,000%
MSCI PACIFIC FREE	0,074%	0,000%	3,065%	0,000%	4,200%	0,000%
MSCI EMERGING MARKETS	0,003%	0,000%	12,355%	15,713%	62,000%	100,000%

⁶⁰ Scherer (2002, 2010).

come ottimi: l'andamento monotono crescente del rendimento all'aumentare del rischio. Non si può negare, infatti, l'eventualità che la *Resampled Efficient Frontier* mostri dei tratti convessi. Anche se si tratta di una situazione difficilmente accettabile perché, allorché si manifesta, significa che è fattibile il conseguimento di *trade off* rischio-rendimento dominanti quelli suggeriti attraverso la combinazione lineare di portafogli ricampionati, è possibile avanzare al riguardo una spiegazione piuttosto semplice. Precisamente, va detto che i pesi ottimi, alla cui determinazione hanno concorso una pluralità di set di input simulati, appaiono non ottimi per gli input originari; ciò significa che la "responsabilità" sta nel meccanismo di "valorizzazione" dei parametri dei portafogli ricampionati.

Il secondo punto di debolezza che l'autore addossa ai portafogli *resampled* è rappresentato dalla possibilità che la loro composizione risulti sensibilmente influenzata da pochi "lucky" draw. In altre parole, può accadere che, all'interno di un certo *resampled portfolio*, l'allocation media (e dunque il "peso ricampionato") di un'asset class sia fortemente condizionata da un ridotto numero di casi (rispetto al totale delle simulazioni effettuate) contraddistinti da allocazioni particolarmente elevate. In proposito, è però opportuno segnalare che il grado di esposizione del criterio della media dei *portfolio weight* alle estrazioni outlier può essere accertato dall'utente della procedura del *resampling*. Egli, infatti, può indagare la presenza o meno di situazioni imputabili ai "lucky" draw attraverso l'esame della distribuzione dei pesi per singola asset class e per portafoglio avente un dato rank trasversalmente alle simulazioni effettuate, mediante l'accostamento alla media di mediana, percentili e range inter-percentili.

A scopo meramente esemplificativo, si segnala che un'indagine di questo tipo condotta per l'asset class *MSCI Europe* relativamente al portafoglio della *REF* nella Figura 4.15 con rank 95, all'interno del quale il peso ricampionato è del 6,28%, rivelerebbe, innanzitutto, che sono 89 i casi (sul totale delle 500 simulazioni) in cui l'Azionario Europa assume un peso maggiore di zero. Considerando solamente questi casi con pesi positivi, si perviene ad individuare il 5° e 95° percentile in pesi rispettivamente pari a 1,24% e 89,31%, cui si affianca un valore medio del 35,30%. Con riguardo allo stesso portafoglio, anche per l'Azionario Pacifico, che registra un peso ricampionato del 7,37%, un'indagine più approfondita porterebbe ad appurare che solo in 96 delle 500 simulazioni il peso associato è superiore a zero. Limitatamente alle citate 96 simulazioni, il peso medio assunto dall'Azionario Pacifico risulterebbe pari al 38,38%.

Il terzo aspetto lacunoso sollevato da Scherer nei confronti del *resampling* è identificato dallo stesso autore con l'espressione "volatility option".⁶¹ Essa descrive la circostanza dell'aumento dell'allocation assegnata ad un'asset class dalla procedura del *resampling* che si riscontra aumentando la sua volatilità, ma mantenendone inalterati i restanti parametri. Paradossalmente, dunque, un deterioramento della qualità di un'asset class conduce a riconoscerle uno "spazio" maggiore. Questa situazione poco plausibile, tuttavia, ha una spiegazione tutt'altro che complessa: è imputabile all'uso combinato dell'*average rule* propria del *resampling* con il *long-only constraint* proprio dell'ottimizzazione di Markowitz. Infatti, le simulazioni che beneficiano dell'ipotizzata maggiore volatilità prospettando scenari con alto rendimento atteso per quell'asset class, suggeriscono allocazioni fortemente positive; per contro, le simulazioni che soffrono dell'ipotizzata maggiore volatilità, presentando scenari con rendimento atteso fortemente negativo, non possono, per via del *long-only constraint*, suggerire posizioni corte, ma solo azzerare il peso. È ovvio che il successivo calcolo del peso medio non può risentire dell'effetto di compensazione tra esposizioni positive e negative che si avrebbe con una *unconstrained optimization*.

⁶¹ Scherer (2002, 2010).

Tabella 4.11 Resampling e “volatility option”.

	PORTAFOGLIO 100	PORTAFOGLIO 100	PORTAFOGLIO 100	PORTAFOGLIO 100
	DEV.ST = 13,95%	DEV.ST = 15,00%	DEV.ST = 20,00%	DEV.ST = 25,00%
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	0,200%	0,200%	0,200%	0,000%
BLOOMBERG US TREASURY BOND	0,800%	0,800%	1,200%	1,800%
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	7,000%	6,800%	6,400%	7,000%
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	0,200%	0,200%	0,400%	0,000%
MSCI EUROPE	4,600%	4,600%	3,600%	4,400%
MSCI NORTH AMERICA	21,000%	19,800%	19,200%	12,600%
MSCI PACIFIC FREE	4,200%	8,400%	14,800%	25,600%
MSCI EMERGING MARKETS	62,000%	59,200%	54,200%	48,600%

Per esemplificare la fattispecie della “volatility option”, si procede apportando delle variazioni alla volatilità dell’*asset class*, tra quelle azionarie, meno performante sulla base degli input classici di Markowitz riportati in Tabella 4.2. Si tratta, nello specifico, dell’*asset class* Azionario Pacifico per la quale si ipotizza, in aggiunta al valore campionario (su base annua) di $\hat{\sigma}$ pari a 13,95%, anche il valore 15%, 20% e 25%. Successivamente, si osserva la composizione del *maximum-variance portfolio* della REF a cui avrebbe condotto, di volta in volta, la procedura del *resampling*, sulla base di scelte operative identiche a quelle già utilizzate nel Paragrafo 4.7.1, con i presunti nuovi valori di $\hat{\sigma}$. In effetti, la Tabella 4.11 mostra che l’Azionario Pacifico, pur essendo l’*asset class* azionaria con il più basso rendimento medio, aumenta il suo peso percentuale nell’ambito del *maximum-variance portfolio* al crescere del presunto grado di dispersione dei suoi rendimenti. Pertanto, la “volatility option” costituisce veramente un possibile punto di debolezza del *resampling*. Ciò non toglie che immaginare l’esclusiva alterazione di un input individuale, quale quello della volatilità, in un contesto, per il resto, totalmente statico costituisce una sorta di forzatura.

Secondo l’autore più volte citato, vi è un’ultima colpa imputabile al *resampling*: è quella di ritenere perfettamente nota la distribuzione multivariata generatrice dei possibili sentieri di rendimenti per N variabili casuali e, ancor più, quella di descrivere tale distribuzione mediante $(\hat{\mu}; \hat{\Sigma})$ che derivano da un’unica fonte informativa, cioè i rendimenti storici. L’esclusivo affidamento, come base di partenza, sull’informazione campionaria è considerato un limite perché fa sì che gli input per il ricampionamento siano essi stessi molto incerti. A dire il vero, questa constatazione non dovrebbe però tradursi in un attacco all’efficacia e all’acume ravvisabile nella via euristica prescelta da *resampling* per evitare di fuggire di fronte al problema dell’*estimation risk*, quanto in uno stimolo a valutare spazi di integrazione tra approcci euristici e bayesiani, così come suggerito al termine del Paragrafo 4.5.

4.7.3 Le scelte discrezionali nel resampling

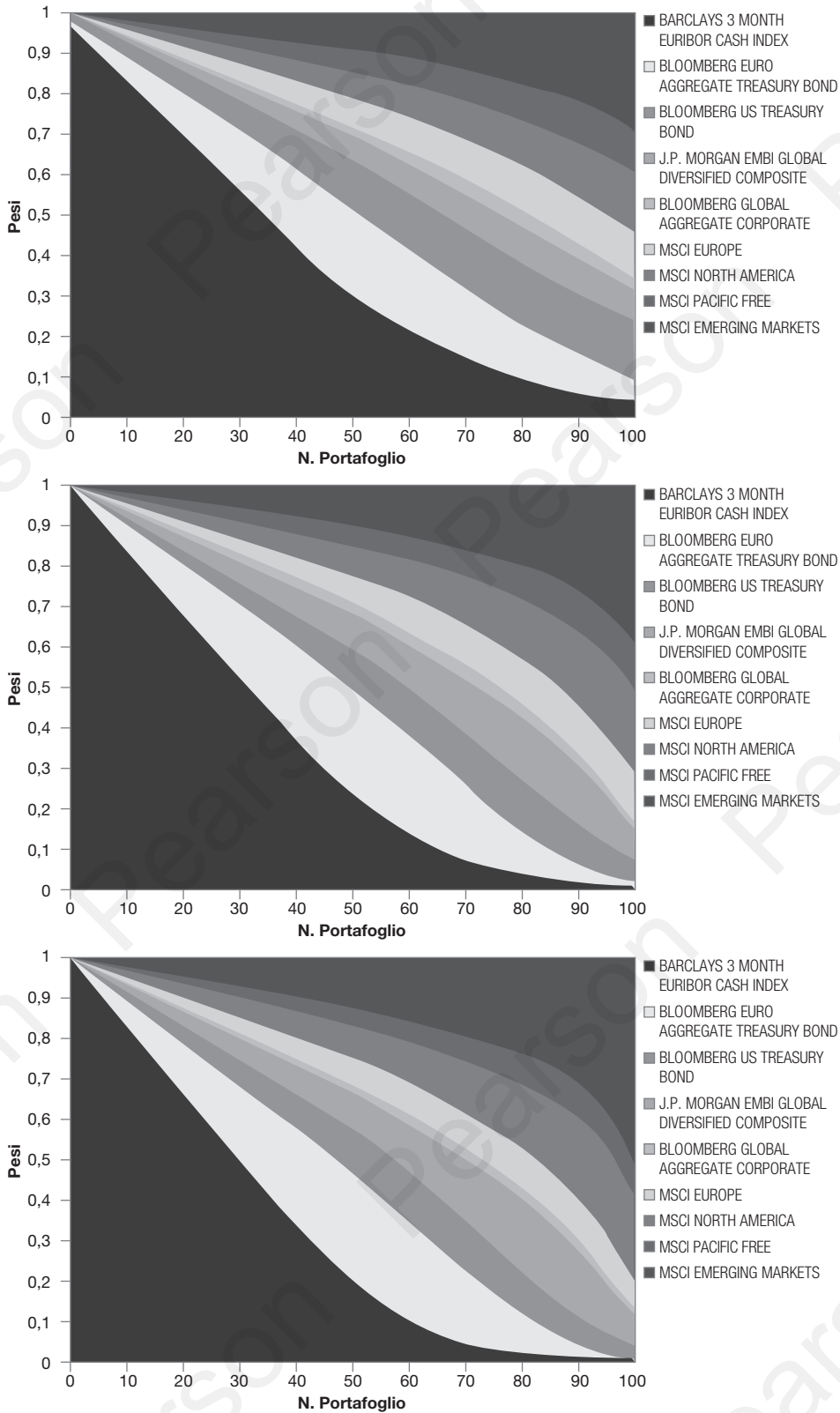
La modalità espositiva delle fasi in cui si articola il processo del *resampling* e del relativo esempio pratico adottata nel Paragrafo 4.7 e 4.7.1 ha volutamente lasciato credere che la

tecnica in esame sia totalmente standardizzata e non conceda margini di adattamento o personalizzazione. Giunti a questo punto, è però doveroso dare atto che si tratterebbe di un giudizio fuorviante perché vi è indubbiamente un aspetto sul quale l'utilizzatore del *resampling* è chiamato ad una scelta. Quest'ultimo va individuato nel numero di osservazioni (L) che devono comporre i sentieri di rendimenti simulati per le N *asset class* funzionali alla costruzione delle *simulated efficient frontier*. Precedentemente L è stato posto pari a 240 semplicemente perché gli input originari che caratterizzano la distribuzione normale multivariata dalla quale sono estratti i rendimenti simulati costituiscono delle stime campionarie fondate su serie storiche di rendimenti mensili relative ad un intervallo temporale di 20 anni. Così facendo, si è messo in relazione il grado di imprecisione delle stime campionarie con il grado di *information uncertainty* che il ricampionamento è "chiamato" a rendere visibile.

La natura non rigida del parametro L è senz'altro chiara dalle parole di Michaud e Michaud, i quali affermano: «*The number of simulated observations used to compute the simulated MV efficient frontiers in each resampling of risk-return estimates is a free parameter of the RE optimization process*». ⁶² Ciò detto, il tema degno di attenzione è quello della logica secondo la quale far uso di tale flessibilità. Ebbene, in proposito la raccomandazione che può essere fornita all'utente della procedura del *resampling* è quella di identificare in L la via attraverso la quale considerare il grado di fiducia, di affidabilità riconosciuto alle proprie stime.

Per agevolare la comprensione di una simile indicazione, è di aiuto fornire dei riscontri concreti circa l'impatto che un differente valore di L può esercitare sulla composizione dei portafogli *resampled* e sulle loro combinazioni rischio-rendimento. Per questo la procedura del *resampling*, così come descritta nel Paragrafo 4.7, è stata ripetuta, sempre a partire dagli originari input ($\hat{\mu}$; $\hat{\Sigma}$), attribuendo al parametro L i valori 12, 60 e 120. La composizione degli *allocation vector* per i 100 portafogli che compongono, in ciascuno dei 3 casi, la *Resampled Efficient Frontier* è rappresentata nella Figura 4.18. Dall'attenta osservazione di quest'ultima, si desume che un valore molto basso di L fa sì che il *resampling* suggerisca composizioni più diversificate, soprattutto per i portafogli più estremi i quali esprimono soluzioni che tendono a quella *equally weighted* e, dunque, a forme di *naïve diversification*. Diversamente, l'impiego di valori di L elevati conduce a composizioni più definite. Il compito di far luce sulle ripercussioni di un differente valore di L sui parametri sintetici dei portafogli *resampled* è affidato alla Figura 4.19. In base ad essa è lecito affermare che a valori inferiori di L corrisponde una frontiera efficiente ricampionata più bassa e più corta. Se, ad esempio, si considera il caso in cui L è pari a 12, il portafoglio a rischio-rendimento minimo e quello a rischio-rendimento massimo presentano, rispettivamente, una deviazione standard dello 0,47% e del 9,87% ed una redditività attesa dell'1,19% e del 6,91%; mentre nel caso in cui L è pari a 60, i portafogli con una posizione equivalente si caratterizzano per un livello di rischio dello 0,45% e del 12,29% a fronte di un rendimento dell'1,14% e dell'8,02%. A questo punto è evidente la logica secondo la quale è opportuno fare uso dei margini di customizzazione che il *resampling* concede al suo utente: un valore di L basso è raccomandabile quando l'asset manager nutre scarsa fiducia nelle proprie stime ($\hat{\mu}$; $\hat{\Sigma}$) poiché in tal caso egli dovrebbe privilegiare la diversificazione; sarà bene, invece, optare per un valore di L alto quando l'*asset manager* è fiducioso delle proprie stime ed intende ambire, con *portfolio weight* più definiti, a maggiori livelli di redditività attesa.

⁶² Michaud e Michaud (2008), pag. 16.



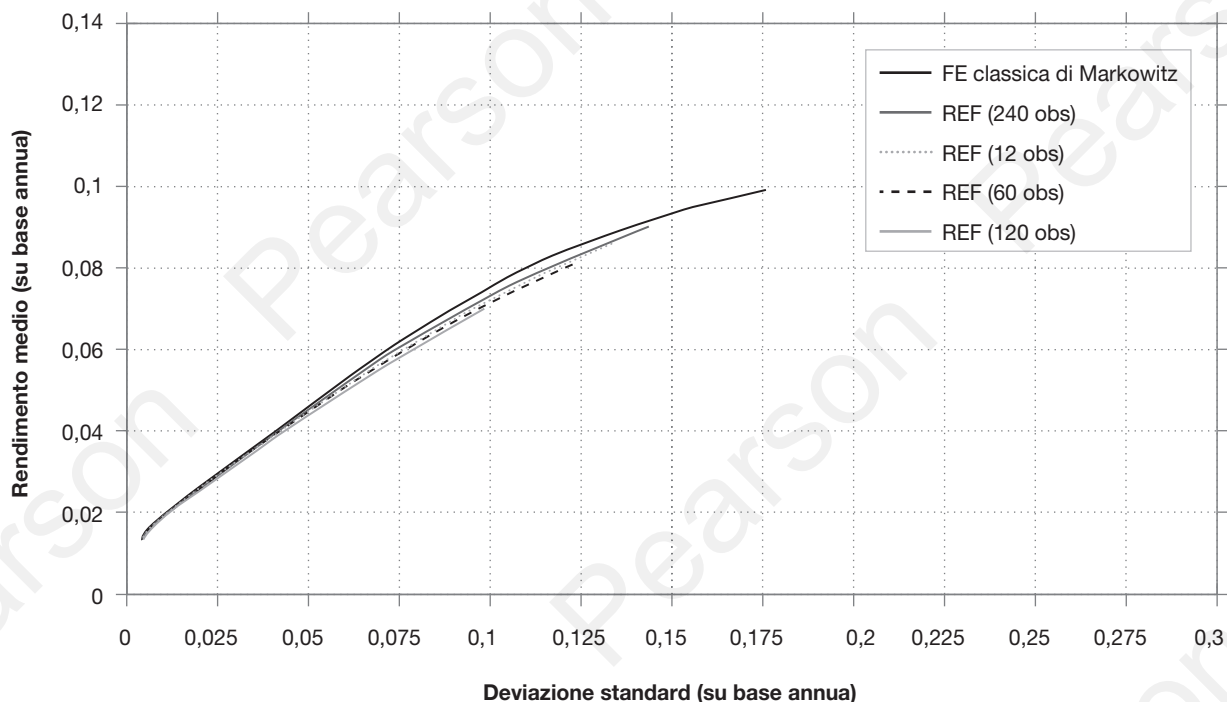


Figura 4.19 Resampled Efficient Frontier (REF) in ipotesi di lunghezza dei sentieri simulati pari a 12, 60 e 120.

4.8 L'asset allocation strategica bayesiana: il modello di Black-Litterman

L'uso degli approcci bayesiani nell'attività di costruzione dei portafogli strategici, in base a quanto anticipato nel Paragrafo 4.5, implica la scelta di affrontare la questione della gestione dell'*estimation risk* intervenendo sugli input, anziché sulle modalità di conduzione del processo di ottimizzazione. Va ricordato, altresì, che l'attenzione dei metodi bayesiani è prevalentemente rivolta ai parametri per i quali gli *estimation error* hanno conseguenze più deleterie per i portafogli, vale a dire i parametri rappresentativi dei rendimenti attesi.

Un necessario prerequisito per la comprensione del funzionamento dei metodi bayesiani nell'ambito delle problematiche di *asset allocation* strategica è dato dalla consapevolezza dell'idea stessa di parametro accolta da tali metodi. In proposito, è corretto affermare che, nell'impostazione bayesiana, un parametro θ configura una variabile casuale o aleatoria ignota di cui si tenta di migliorare la conoscenza avvalendosi di più *set* informativi. Ciò costituisce un fondamentale elemento distintivo rispetto all'impostazione classica utilizzata nel Paragrafo 4.4 e in quelli successivi. Quest'ultima, infatti, intende per "parametro" un valore singolo, cioè fisso, ma incognito, di cui comunque si cerca di catturare il vero valore affidandosi esclusivamente a una fonte informativa. Da questi elementi essenziali inevitabilmente discende una notevole diversità del processo di stima bayesiano rispetto a quello classico, sia in termini di input selezionati e trattati sia in termini di output fornito. Come noto, l'impostazione statistica classica si avvale unicamente di dati campionari e il parametro incognito viene stimato in maniera puntuale attraverso un'opportuna funzione (media, varianza ecc.) di tali dati. Diversamente, l'impostazione bayesiana vuole includere come componenti del processo di stima sia le conoscenze o le informazioni già esistenti (dunque pregresse), generalmente identificate con l'espressione *prior information*, sia in-

formazioni nuove e originali ritenute rilevanti quali, per esempio, le opinioni soggettive dell'*asset manager* scaturite da sue analisi proprietarie. Quanto all'output, il processo di stima restituisce non un singolo numero, bensì la distribuzione di probabilità di θ , cioè una *probability density function* (pdf).

Il meccanismo teorico e formale che consente di combinare o aggiornare l'informazione esistente con nuove informazioni è rappresentato dal teorema di Bayes (o *Bayes' rule*). In base a esso, il "traguardo" qui indicato con $p(\theta | \mathbf{X})$, definibile in modo appropriato come *posterior distribution* o distribuzione di probabilità a posteriori di θ e capace di esprimere il grado di incertezza sui possibili valori di θ dopo che si è considerata la nuova informazione e/o i nuovi dati \mathbf{X} , è conseguibile attraverso il procedimento logico evidenziato nella (4.29):

$$p(\theta | \mathbf{X}) = p(\theta) \frac{p(\mathbf{X} | \theta)}{p(\mathbf{X})} \quad (4.29)$$

vale a dire moltiplicando $p(\theta)$, la *prior distribution* o distribuzione di probabilità a priori (cioè non condizionata) di θ , per un fattore di adeguamento corrispondente al rapporto tra la funzione di verosimiglianza di \mathbf{X} , $p(\mathbf{X} | \theta)$, espressiva della probabilità di osservare l'informazione \mathbf{X} assumendo come vero un certo valore di θ , e la probabilità non condizionata di \mathbf{X} . In definitiva, si può affermare, indifferentemente, che il teorema di Bayes fornisce una via teoricamente "sana" per effettuare la *blending* di due distribuzioni di probabilità e ottenerne una terza (la *posterior distribution*, appunto) oppure per modificare il proprio grado di incertezza o fiducia sui possibili valori del parametro θ aggiornando e poi trasformando una distribuzione di probabilità non condizionata di una variabile casuale in una distribuzione di probabilità condizionata.

Una volta compresa l'essenza dell'impostazione bayesiana, non si può fare a meno di sottolineare quanto essa possa essere importante e preziosa per gli *asset manager*. L'integrazione tra un assetto quantitativo e i giudizi o le valutazioni personali costituisce una delle maggiori difficoltà in cui questi soggetti incappano. Essa può sfociare in una resistenza o addirittura in un rifiuto della modellistica quantitativa ritenuta incapace di catturare efficacemente il valore aggiunto che essi possono fornire. Ebbene, la statistica bayesiana può supplire a questa disarmonia poiché, come dimostrato dalla (4.29), mette a disposizione degli *asset manager* il metodo logico per incorporare i propri giudizi in un *framework* quantitativo e con essi determinare una revisione degli input dell'ottimizzazione. Il *blending* di più *set* informativi asseconda il *modus operandi* dei soggetti decisori, ma consente anche una razionalizzazione della loro soggettività. Una sorta di giudizio favorevole verso questo modo di agire può riscontrarsi nelle parole autorevoli dello stesso Markowitz: "the rational investor is a Bayesian".⁶³

La metodologia bayesiana appena illustrata trova la sua applicazione più preminente nel *Black-Litterman model* sviluppato dai due autori presso Goldman Sachs, nell'ambito del *Quantitative Resources Group*, agli inizi degli anni Novanta e divenuto popolare solo più tardi.⁶⁴ Affidando ai paragrafi successivi il compito di un'esposizione ragionata ed

⁶³ Markowitz (1987), pag. 57. Da una lettura attenta del contributo di Markowitz del 1952, si può rilevare che egli stesso, pur avvalendosi di stime campionarie per gli input, avvertiva il lettore dell'opportunità di fare ricorso a logiche diverse per la formazione degli input. Markowitz, infatti, scriveva: «My feeling is that the statistical computations should be used to arrive at a tentative *set* of μ_i and σ_{ij} . Judgment should then be used in increasing or decreasing some of these μ_i and σ_{ij} on the basis of factors or nuances not taken into account by the formal computations». E ancora, aggiungeva: «One suggestion as to tentative μ_i , σ_{ij} is to use observed μ_i , σ_{ij} for some period of the past. I believe that better methods, which take into account more information, can be found. I believe that what is needed is essentially a 'probabilistic' reformulation of security analysis. I will not pursue this subject here, for this is another story». Markowitz (1952), pag. 91.

⁶⁴ Black e Litterman (1991; 1992).

esaustiva degli aspetti statistici e/o analitici del modello, è opportuno menzionare fin da subito, seppur sinteticamente, l'output principale e decisivo che esso pone al servizio degli *asset manager* (per esempio di un comitato investimento o di un team di *asset allocation*). Si tratta di un vettore di rendimenti attesi, da utilizzarsi come input nel processo di ottimizzazione, rappresentativo della media della *posterior distribution* ottenuta dalla combinazione di quelli che possono giustamente reputarsi i due ingredienti fondamentali del modello di Black-Litterman:

- una *prior information*, legittimata da un modello di *asset pricing* e precisamente da un modello di equilibrio quale il CAPM, in grado di fungere, secondo le parole degli stessi autori, da “center of gravity” per i rendimenti attesi finali e, quindi, di configurarsi come previsione iniziale e incondizionata dei rendimenti;
- l'informazione privata espressiva esclusivamente delle convinzioni e delle opinioni, più o meno robuste (proprie) dell'*asset manager* (e, quindi, svincolate dal modello di *asset pricing* prima citato), capace di imprimere un aggiustamento dei rendimenti attesi finali rispetto alla loro iniziale previsione.

4.8.1 Il primo set informativo nel modello di Black-Litterman: i rendimenti di equilibrio o impliciti

Nel noto contributo intitolato “Global Portfolio Optimization”, apparso sul *Financial Analysts Journal* nel 1992, gli autori Fisher Black e Robert Litterman enunciano chiaramente la *prior information* considerata nel loro modello scrivendo: «In our model equilibrium risk premiums provide a neutral reference point for expected returns»; e ancora, come prima ricordato: «Equilibrium risk premiums provide a center of gravity for expected returns». La risposta “di default” così formulata alla domanda “Quali sono i rendimenti attesi in futuro?” non corrisponde, però, a qualcosa di direttamente osservabile; deve perciò essere ricercata o dedotta.

La tecnica che può essere utilizzata a questo scopo e che fa sì che gli *equilibrium risk premium* (e *return*) possano indifferentemente essere denominati *implied risk premium* (e *return*) è quella dell'ottimizzazione inversa (*reverse optimization*) introdotta da Sharpe.⁶⁵ Questa denominazione è giustificata dal fatto di essere di fronte a una tecnica che prevede, rispetto a una tipica procedura di ottimizzazione di portafoglio, l'inversione tra input e output. Essa, infatti, dispone che il “punto di partenza” sia rappresentato da un portafoglio e che il “punto di arrivo” sia rappresentato da un vettore di rendimenti. Ritenendo sensato che l'*asset manager*, in assenza di informazioni private e opinioni soggettive, suggerisca la detenzione di un portafoglio la cui composizione è coerente con il peso che le *asset class*, stante la loro capitalizzazione, hanno sul mercato, gli autori suggeriscono il portafoglio di mercato quale opportuno “punto di partenza”. Considerato che, per definizione, il portafoglio di mercato consiste di un *set* di pesi aventi segno positivo e tali da sommare a 1, è possibile porre in essere la *reverse optimization* e, dunque, ricavare gli *excess return* (o *risk premium*) impliciti, partendo da una funzione di utilità quadratica da massimizzare attraverso una formula chiusa per effetto della mancanza di vincoli, avendo come dati la matrice di covarianza dei rendimenti delle *asset class*, i *market capitalization weight* (ossia i pesi della capitalizzazione di ciascuna *asset class* rispetto a quella del portafoglio di mercato) e il parametro di avversione al rischio. Formalmente, dunque, la *reverse optimization* prende le mosse dalla (4.30):

$$\max_{\mathbf{w}}(U) = \max_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{w}'_{Eq.} \Pi_{Ex_eq.} - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}'_{Eq.} \Sigma \mathbf{w}_{Eq.} \right) \quad (4.30)$$

⁶⁵ In tema di *reverse optimization* si vedano: Sharpe (1974); Best e Grauer (1985); Sharpe (2010).

dove:

$\mathbf{w}_{Eq.}$ = vettore di dimensione $N \times 1$ dei *market capitalization weight* delle *asset class*;

$\Pi_{Ex.eq.}$ = vettore di dimensione $N \times 1$ degli *equilibrium risk premium* o degli *equilibrium excess return*;

Σ = matrice $N \times N$ di covarianza tra i rendimenti delle *asset class*;

δ = è uno scalare dato dall'espressione $(\bar{R}_{P_mkt} - R_f) / \sigma_{P_mkt}^2$ nell'ambito della quale R_f è il rendimento privo di rischio, \bar{R}_{P_mkt} è il rendimento medio del portafoglio di mercato ricavato dalla serie dei rendimenti che nel tempo avrebbe avuto il portafoglio di mercato, calcolato come $\mathbf{R} \times \mathbf{w}_{Eq.}$ dove \mathbf{R} è la matrice $T \times N$ dei rendimenti storici delle *asset class* costituenti il portafoglio di mercato, e $\sigma_{P_mkt}^2$ è la varianza del portafoglio ottenuta da $\mathbf{w}_{Eq.}' \Sigma \mathbf{w}_{Eq.}$. In termini qualitativi, δ può essere definito come coefficiente di avversione al rischio medio dei partecipanti ai mercati finanziari e può essere interpretato come il *market price of risk*, vale a dire come l'eccesso di rendimento preteso dalla generalità degli investitori per unità di varianza. Quanto appena detto non esclude che in fase applicativa, per l'identificazione del numeratore di δ , si scelga di avvalersi di un *market risk premium* atteso, anziché del premio al rischio che mediamente avrebbe contraddistinto il portafoglio di equilibrio in passato.

La massimizzazione è effettuata mediante il calcolo della derivata prima della (4.30) rispetto ai pesi e imponendo che la stessa sia uguale a zero. Procedendo come descritto, si ottiene la (4.31):

$$\Pi_{Ex.eq.} - \delta \Sigma \mathbf{w}_{Eq.} = 0 \quad (4.31)$$

da cui, risolvendo per l'incognita ricercata, si ha la (4.32):

$$\Pi_{Ex.eq.} = \delta \Sigma \mathbf{w}_{Eq.} \quad (4.32)$$

Sommando alla quantità nella (4.32) il rendimento *risk free* stimato, si ottengono i rendimenti di equilibrio o impliciti come indicato nella (4.33)

$$\Pi_{Eq.} = \Pi_{Ex.eq.} + R_f \mathbf{e} \quad (4.33)$$

dove \mathbf{e} è, ancora una volta, un vettore di valori unitari di dimensione $N \times 1$. La (4.33) è del tutto equivalente alla (4.34):

$$\Pi_{Eq.} = R_f \mathbf{e} + \frac{\bar{R}_{P_mkt} - R_f}{\sigma_{P_mkt}^2} \Sigma \mathbf{w}_{Eq.} \quad (4.34)$$

La *prior information* indicata da Black e Litterman, alla luce del procedimento seguito per ricavarla, può legittimamente considerarsi una plausibile (forse la migliore) previsione possibile dei rendimenti attesi nell'ipotesi in cui si disponga solamente di informazioni pubbliche poiché, per mezzo dell'ottimizzazione inversa a partire dal portafoglio di mercato, è come se si fossero considerate le *view* di tutti i partecipanti al mercato.⁶⁶ Ovviamente, se tale *prior information* è (ri)utilizzata nell'ambito di una *Mean-Variance Optimization*, essa conduce (tra i vari portafogli ottimizzati) sicuramente al *market portfolio* e, dunque, fornisce una indicazione razionale e condivisibile circa la strategia di diversificazione opportuna in mancanza di veri o supposti vantaggi informativi dell'*asset manager*. La coerenza della *prior information* con il modello di equilibrio del CAPM non trova conferma solo nello *starting point* della procedura di *reverse optimization* che consente

⁶⁶ Black e Litterman (1991; 1992); Cheung (2010).

di estrapolare i rendimenti, mutuando proprio le parole degli autori, “that would clear the market”,⁶⁷ ma anche nella corrispondenza della (4.34) con la teoria del “corretto rendimento atteso” di un *asset* secondo il modello di *pricing* sancito dal CAPM.⁶⁸

Una volta fatta chiarezza relativamente al primo *set* informativo di ausilio per l’ottenimento dell’input dei rendimenti attesi, è bene, come richiesto dall’impostazione bayesiana, formulare la distribuzione probabilistica a priori (*prior distribution*) degli stessi. Alla sua caratterizzazione concorre l’output della *reverse optimization*, vale a dire gli *equilibrium* o *implied risk premium* (e *return*); essa, infatti, è data dalla (4.35):

$$\mu \sim N(\Pi_{Eq}; \tau \Sigma) \tag{4.35}$$

Pertanto, nel modello di Black-Litterman i rendimenti attesi inizialmente si distribuiscono secondo una normale multivariata con vettore delle medie dato dai rendimenti impliciti e matrice di covarianza, stimata per via campionaria, proporzionale a Σ con una costante di proporzionalità rappresentata da τ . Quest’ultimo parametro rappresenta il grado di attendibilità o di incertezza dei rendimenti di equilibrio stimati, nel senso che quanto più esso si avvicina a un valore nullo, tanto più sono affidabili le *equilibrium estimate*. Nonostante questa diffusa interpretazione, in letteratura si ravvisano, a riguardo, scelte differenti e discordanti: Satchell e Scowcroft e Meucci optano per un valore unitario, mentre Black e Litterman, He e Litterman e Lee prevedono valori molto prossimi a zero ritenendo che l’incertezza relativa alla media dei rendimenti sia inferiore all’incertezza connessa ai rendimenti stessi.⁶⁹ Anche se l’evidenza delle scelte operate da vari autori conduce a supportare una scelta per τ compresa nell’intervallo (0,1], deve riconoscersi l’opportunità di una logica di calibrazione per la sua individuazione. Considerato che la matrice di covarianza è stimata sulla base di dati storici e che l’errore di stima tende a diminuire al crescere della dimensione del campione di dati e a aumentare al crescere del numero di *asset class* considerate, sono criteri di calibrazione ammissibili quelli indicati nella (4.36) e (4.37):

$$\tau = \frac{1}{T} \tag{4.36}$$

$$\tau = \frac{1}{T - N} \tag{4.37}$$

L’illustrazione presentata in queste pagine della *prior information* e della *prior distribution* dei rendimenti attesi è pienamente fedele ai contributi originari di Black e Litterman.⁷⁰

⁶⁷ Gli *implied equilibrium risk premium* (e *return*) rappresentano, infatti, rendimenti che, in un dato istante, permettono l’eguaglianza tra domanda e offerta di *asset*.

⁶⁸ In termini algebrici, secondo tale modello, per una generica *asset class* i tra le N considerate si può scrivere:

$$R_i = R_f + \beta_i (\bar{R}_{P_mkt} - R_f)$$

la quale, considerata la definizione di β_i , può essere così riscritta:

$$R_i = R_f + \frac{\text{cov}(R_i; R_{P_mkt})}{\sigma_{P_mkt}^2} (\bar{R}_{P_mkt} - R_f)$$

Algebricamente, quest’ultima è identica a:

$$R_i = R_f + \frac{\bar{R}_{P_mkt} - R_f}{\sigma_{P_mkt}^2} \text{cov}(R_i; R_{P_mkt})$$

La sua riscrittura estesa a N *asset class* e in termini matriciali è coincidente con la (4.34):

$$\Pi_{Eq} = R_f \mathbf{e} + \frac{\bar{R}_{P_mkt} - R_f}{\sigma_{P_mkt}^2} \Sigma \mathbf{w}_{Eq}$$

⁶⁹ Satchell e Scowcroft (2000); Fusai e Meucci (2003); Meucci (2010); Black e Litterman (1991; 1992); He e Litterman (1999); Lee (2000).

⁷⁰ Black e Litterman (1991; 1992).

Questa scelta non intende, però, escludere categoricamente l'adozione di eventuali varianti adottate dai *practitioner*. Volendo essere più precisi, si richiama, per esempio, la possibilità che il portafoglio di riferimento per l'avvio della procedura di *reverse optimization* non sia il *market portfolio*, bensì un portafoglio che un investitore residente in un certo contesto geografico considera neutrale/normale.⁷¹ Ancora, si fa riferimento alla possibilità di rendere coerente il calcolo dei rendimenti impliciti con un prefissato livello *target* di *Sharpe Ratio*, ovvero di rapporto tra rendimento differenziale del portafoglio rispetto al *risk free* e volatilità del portafoglio, il che in parte differisce dalla precedente definizione di δ . Quest'ultima è una scelta rinvenibile nel contributo di Bevan e Winkelmann.⁷² Infine, nonostante i suggerimenti per il *setting* di τ richiamati in questo paragrafo, deve riconoscersi, in accordo con quanto evidenziato da Allaj e da Fuhrer e Hock che, in definitiva, è un parametro che concede, in sede applicativa, ampi spazi alla soggettività, non a caso è ritenuto il parametro più enigmatico e misterioso del modello.⁷³

4.8.2 Il secondo set informativo nel modello di Black-Litterman: le view

La seconda e importante fonte informativa prevista dal modello di Black-Litterman, destinata a interagire successivamente con gli *implied return*,⁷⁴ è rappresentata dalle *view* dell'*asset manager*. Evidentemente, si tratta di informazione addizionale che ha natura privata, "personale", con la quale egli manifesta una visione non perfettamente allineata con quella media degli altri partecipanti al mercato o, più in generale, con gli *implied return*.

La previsione di questo secondo *set* informativo da parte del modello in esame impone di prestare attenzione a una pluralità di questioni. In prima battuta, è bene dedicarsi agli aspetti sostanziali inerenti al tema delle *view*, rimandando a un secondo momento le problematiche legate alla loro rappresentazione formale. Ciò perché, nella prospettiva di un *asset manager*, in *primis* è cruciale cogliere ciò che il modello di Black-Litterman può consentirgli di esprimere. Ebbene, in proposito va posto in evidenza che il modello permette di formulare:

- *view* assolute, cioè aspettative soggettive di performance di un'*asset class* (esempio: "si ritiene abbastanza probabile che l'*asset class* 1 possa fornire un rendimento medio annuo dell' $y\%$ ");
- *view* relative, cioè aspettative soggettive di rendimento differenziale di una o più *asset class* rispetto a una o più altre (esempio: "si è fortemente convinti che l'*asset class* 1 riesca a battere l'*asset class* 2 dell' $y\%$ su base annua");
- un numero K a piacere di *view* con il solo vincolo $0 \leq K \leq N$ e dunque senza l'impegno a dover formulare opinioni inerenti l'intero "universo investibile" selezionato.

Venendo, invece, ai profili formali di gestione delle *view*, occorre tenere presente che anche il secondo *set* informativo è incerto, per cui i rendimenti attesi da queste suggeriti dovranno essere espressi come distribuzione di probabilità. Affinché ciò sia possibile, si rendono necessari vari adempimenti sul piano tecnico:

⁷¹ L'adozione di un punto di partenza per la *reverse optimization* differente dal *market portfolio* è usuale in caso di impiego del modello di Black-Litterman a supporto dell'attività di *asset allocation* tattica anziché di quella strategica. Poiché non è un obiettivo di questo capitolo approfondire l'*asset allocation* tattica, sul tema si rinvia a Braga (2008); Braga e Natale (2012); Lee (2000).

⁷² Bevan e Winkelmann (1998).

⁷³ Allaj (2013) e Fuhrer e Hock (2023). Proprio la natura misteriosa del parametro τ ha generato, da parte degli autori citati, i primi sforzi per l'elaborazione di una procedura econometrica di stima, a partire dai dati, che conferisca oggettività alla stima stessa.

⁷⁴ Si rinvia al Paragrafo 4.8.3.

- l'identificazione delle *asset class* chiamate in causa da ciascuna *view*;
- l'esplicitazione dell'entità delle *view*;
- l'inclusione dell'incertezza o del livello di confidenza connesso alle *view* considerato che, per quanto detto poc'anzi, esse corrispondono a dei *probability statement* e non a delle enunciazioni deterministiche.

La prima esigenza è soddisfatta dalla matrice \mathbf{P} , comunemente detta *view portfolio* (e talvolta anche *projection matrix*), di dimensioni $K \times N$. Ciascuna riga \mathbf{p} di questa matrice permette di riconoscere le *asset class* interessate da una *view*. Se si tratta di una *view* assoluta, la riga riporta il valore +1 nella posizione corrispondente all'*asset class* coinvolta, mentre i restanti elementi sono posti uguali a zero. In caso, invece, di *view* relativa, se quest'ultima coinvolge una sola *asset class* sovraperformante e una sola *asset class* sottoperformante, è richiesto l'inserimento del valore +1 e -1 nella posizione corrispondente, rispettivamente, all'una e all'altra. Da ultimo, in caso di *view* relativa con più *asset class* sovraperformanti e sottoperformanti, la compilazione della riga riferita a tale opinione soggettiva all'interno della matrice \mathbf{P} impone l'impiego di uno schema di pesatura. In letteratura, si rinviene la proposta di Satchell e Scowcroft per un *equal weighting scheme* e quella di He e Litterman per un *market capitalization weighting scheme*.⁷⁵ Con il primo, il valore da porre nella posizione corrispondente a un'*asset class* sovraperformante è dato da +1 diviso il numero di mercati sovraperformanti, mentre il valore da indicare nella posizione corrispondente a un'*asset class* sottoperformante è dato da -1 diviso il numero dei mercati sottoperformanti. Il secondo schema di pesatura prevede, invece, che in corrispondenza della posizione di un mercato sovraperformante debba essere indicato un valore positivo espressivo del peso relativo della capitalizzazione di quel mercato sulla capitalizzazione totale degli *asset* sovraperformanti e che in corrispondenza di un mercato sottoperformante debba invece vedersi, preceduto dal segno meno, un valore espressivo dell'incidenza della sua capitalizzazione rispetto a quello complessivamente riferibile agli *asset* sottoperformanti. Da quanto detto, è indubbio che la stesura di una riga della matrice \mathbf{P} sia leggermente più macchinosa in presenza di quest'ultima tipologia di *view*. Tuttavia va anche riconosciuto che non è prassi, per gli *asset manager*, formulare le proprie opinioni in questi termini; è invece consuetudine formulare *view* del primo tipo e, ancor più, del secondo tipo. Alla luce delle modalità di compilazione della matrice \mathbf{P} appena illustrate, è evidente che gli elementi di una riga di tale matrice sommano a zero quando è espressa una *view* relativa, mentre sommano a +1 in presenza di una *view* assoluta.

L'indispensabile specificazione della dimensione delle *view* è effettuata semplicemente elencando la loro entità in un vettore $K \times 1$ indicato con \mathbf{Q} . Ciò che resta da gestire è l'inclusione dell'aspetto incertezza annesso alle *view*. Esso fa sì che si debba affiancare al vettore \mathbf{Q} , in via additiva, un vettore $\boldsymbol{\epsilon}$ di analoghe dimensioni contenente l'errore connesso a ciascuna *view*. Il modello di Black-Litterman assume che $\boldsymbol{\epsilon}$ sia una variabile casuale normalmente distribuita con vettore delle medie nullo e matrice di covarianza $\boldsymbol{\Omega}$, di dimensione $K \times K$, con varianza dei termini di errore sulla diagonale principale e valore nullo degli elementi al di fuori: ciò significa che si ipotizza che le *view* siano tra di loro indipendenti, non correlate. Con riguardo ai valori posti sulla diagonale principale di $\boldsymbol{\Omega}$, è evidente che quanto più sono elevati, tanto maggiore è l'incertezza connessa alle *view*; si può dunque affermare che gli stessi presentano un legame inverso con il grado di fiducia che l'*asset manager* ripone nelle proprie aspettative sull'andamento del mercato.

Ricordando quanto detto nel Paragrafo 4.8, è chiaro che il secondo *set* informativo qui discusso è destinato, nella logica bayesiana, a consentire un "aggiornamento" dei rendi-

⁷⁵ Satchell e Scowcroft (2000); He e Litterman (1999).

menti attesi rispetto alla loro *prior estimate*. È bene, allora, conoscerne la rappresentazione nella forma di variabile casuale. A ciò provvede la (4.38):

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{Q}; \boldsymbol{\Omega}) \quad (4.38)$$

È altresì opportuno esprimerne la portata e le caratteristiche in modo tale che, come del resto il modello richiede, esso finisca per condizionare la stima finale dei rendimenti attesi (*posterior estimate*). Gli autori suggeriscono la forma compatta propria della (4.39), basata sull'uso dell'algebra matriciale:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.39)$$

La (4.39) di fatto descrive un sistema di equazioni/relazioni lineari che, in forma più estesa, può essere espresso nella (4.40):

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & \dots & \dots & P_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{K,1} & \dots & \dots & \dots & P_{K,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ Q_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \varepsilon_K \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Anche per i termini di errore, va ricordata la natura casuale, come evidenziato dalla (4.41):

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{K,K} \end{bmatrix} \right) \quad (4.41)$$

dove ω_{ij} (con i e $j = 1, \dots, K$ in questo caso) rappresenta le varianze dei singoli termini di errore che formano la diagonale principale della matrice $\boldsymbol{\Omega}$. La determinazione di questi elementi costituisce uno degli aspetti più complicati e controversi del modello di Black-Litterman, anche perché gli autori non hanno fornito chiare indicazioni metodologiche circa la stesura di $\boldsymbol{\Omega}$ nel loro originario contributo. Per completezza, è bene allora passare in rassegna i diversi metodi riscontrabili nella letteratura di riferimento. Essi possono essere così elencati:⁷⁶

- approccio “endogeno” di He e Litterman;
- approccio basato sull'utilizzo di un intervallo di confidenza di Drobetz;
- approccio di Idzorek;
- approccio di Meucci.

I proponenti del primo approccio, al riguardo scrivono: «[...] the confidence level on a view is calibrated so that the ratio between the parameters ω and τ is equal to the variance of the portfolio in the view, $\mathbf{p}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}'$ ». ⁷⁷ Stando a queste parole, ogni termine ω_{ij} (quando $i = j$) è determinato secondo la (4.42):

$$\omega_{ij} = \mathbf{p}(\tau\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{p}' \quad \forall i = j \quad (4.42)$$

dove \mathbf{p} , come si ricorderà, è una delle K righe della matrice \mathbf{P} (*view portfolio*).

Questo metodo è stato definito “endogeno” perché non rende indispensabile, da parte dell'utente del modello di Black-Litterman, l'esplicitazione di un proprio livello di fiducia nelle *view* espresse, in quanto ipotizza che la varianza dei termini di errore annessi alle *view* sia la stessa stimata per i *prior return*.

⁷⁶ He e Litterman (1999); Drobetz (2001); Idzorek (2002); Meucci (2005).

⁷⁷ He e Litterman (1999), pag. 6.

I restanti tre approcci dell’elenco hanno un elemento in comune: il fatto di non poter rinunciare all’impiego di un dato “esogeno” coincidente proprio con il livello di fiducia riposto dall’*asset manager* nelle *view* formulate. Il metodo basato sull’utilizzo di un intervallo di confidenza suggerisce di enunciare l’entità q della *view* come momento centrale di una distribuzione normale e di accompagnarla con l’indicazione di un range di oscillazione simmetrico $M_{Oscillaz.}$ cui è associato il livello di probabilità α ritenuto consono dall’*asset manager*. A partire da quest’ultima informazione, è possibile ricavare lo scostamento standardizzato dalla media che in una gaussiana consente di isolare, ripartendolo equamente nella coda di destra e di sinistra, il complemento a 1 del livello di fiducia. A questo punto, evidentemente, l’unica grandezza ignota è la volatilità a cui applicare, come moltiplicatore, quello scostamento; una volta individuata, il suo elevamento al quadrato condurrà a ω_{ij} (con $i = j$). In termini formali, la procedura descritta impone di scrivere l’uguaglianza come da (4.43), con incognita ω_{ij} (con $i = j$):

$$q \pm N^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{\omega_{ij}} = q \pm M_{Oscillaz.} \tag{4.43}$$

risolta la quale si perviene alla (4.44):

$$\omega_{ij} = \left(\frac{\pm M_{Oscillaz.}}{\pm N^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right)} \right)^2 \tag{4.44}$$

dove N^{-1} indica la funzione inversa di una normale standardizzata.

Per rendere più agevole la comprensione, è possibile ipotizzare a titolo esemplificativo una *view* così dichiarata: “l’*asset class* 1 avrà un rendimento atteso del 6% con una probabilità del 90% di collocarsi tra il 5% e il 7%”. In tal caso, si dovrebbe impostare l’equazione (4.45):

$$6\% \pm N^{-1} \left(\frac{1 - 90\%}{2} \right) \cdot \sqrt{\omega_{ij}} = 6\% \pm 1\% \tag{4.45}$$

che risolta per ω_{ij} porta a 0,00003696.

L’approccio di Idzorek prevede che gli elementi diagonali della matrice $\mathbf{\Omega}$ debbano essere calcolati come reciproco del livello di confidenza moltiplicato per una quantità definita come *calibration factor* (CF).⁷⁸ In tal caso, la matrice della varianza delle *view* assume la forma mostrata dalla (4.46):

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \cdot CF & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} \cdot CF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_K} \cdot CF \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

La specificazione del *calibration factor* è fondata su due quantità. La prima è data dalla somma algebrica dei termini che compongono la matrice che identifica, usando le parole dell’autore, la *variance of the view portfolio*. La seconda quantità è rappresentata dal livello di confidenza medio atteso nelle *view* (\overline{LC}) supposto pari al 50%. Formalmente, è dunque corretta la forma della (4.47):

$$CF = (1' \mathbf{P} \mathbf{\Sigma} \mathbf{P}' 1) \cdot \overline{LC} \tag{4.47}$$

⁷⁸ Idzorek (2002).

dove $\mathbf{1}$ è un vettore colonna $K \times 1$ contenente valori unitari per cui l'espressione tra parentesi tonde nella (4.47) conduce a uno scalare, cioè a un numero.⁷⁹

Infine, la modalità scelta da Meucci per predisporre la matrice $\mathbf{\Omega}$ è riportata nella (4.48):

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right) \cdot \mathbf{p}_1 \tau \Sigma \mathbf{p}'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) \cdot \mathbf{p}_2 \tau \Sigma \mathbf{p}'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\alpha_K} - 1\right) \cdot \mathbf{p}_K \tau \Sigma \mathbf{p}'_K \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Come è possibile notare, la soluzione di Meucci recupera la connessione tra la varianza degli errori delle *view* con la varianza delle *prior estimate* già presente nell'approccio di He e Litterman, ma la arricchisce dell'aspetto soggettivo rappresentato dal diverso grado di convinzione e fiducia dell'*asset manager* nelle *view* attraverso la quantità contenuta tra parentesi tonde.⁸⁰ Quest'ultima restituirà valori più elevati al ridursi di livello di confidenza nelle *view*, determinando una maggiore dispersione per la variabile casuale ϵ descritta dalla (4.41) e, naturalmente, valori più contenuti in presenza di termini α più elevati.

4.8.3 Il blending dei set informativi e i rendimenti attesi nel modello di Black-Litterman

I Paragrafi 4.8.1 e 4.8.2 hanno fornito una illustrazione approfondita delle due distinte fonti di informazione che il modello di Black-Litterman ritiene utili per l'ottenimento degli input dei rendimenti attesi $\boldsymbol{\mu}$. Entrambe sono state descritte mediante distribuzioni di probabilità poiché entrambe ammettono la natura sconosciuta e *random* degli stessi. A questo punto, il passo ulteriore che resta da compiere è quello dell'identificazione di rendimenti attesi che siano il più possibile coerenti con entrambi i *set* informativi già esaminati. In pratica, va ricercata la risposta alla fondamentale domanda: come è possibile giungere a dei rendimenti attesi considerando simultaneamente le due fonti di informazione?

Per iniziare la formulazione della risposta è bene dire che, poiché ci si muove in un contesto bayesiano, anch'essa assume la forma di distribuzione di probabilità. Volendo essere precisi, si perviene a una *posterior distribution*, cioè a una distribuzione di probabilità condizionata, anch'essa normale multivariata, che discende dalla considerazione della *prior distribution* e dal suo *updating* (revisione) ad opera della distribuzione di probabilità delle *view*. Anche se in questa sede non si è interessati a una riproposizione di tutti i passaggi analitici che conducono alla stima dei rendimenti attesi finali secondo il modello di Black-Litterman, non si può fare a meno di sottolineare che il parametro sintetico della media della *posterior distribution* scaturisce dalla risoluzione del problema di ottimizzazione vincolata presentato nella (4.49):

$$\min_{\boldsymbol{\mu}} (\boldsymbol{\mu} - \Pi_{Eq.})' \tau \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \Pi_{Eq.}) \quad (4.49)$$

sotto il vincolo:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q} + \epsilon$$

⁷⁹ Esclusivamente per ragioni di completezza, si segnala che l'autore di questo approccio per l'esplicitazione della matrice $\mathbf{\Omega}$, prendendo le mosse dalla (4.47), suggerisce anche una via per l'identificazione del τ .

Esso dovrebbe scaturire dal rapporto tra *variance of the view portfolio* e la quantità $\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\alpha_k} \cdot CF\right)$ che può leggersi come valore medio degli elementi diagonali di $\mathbf{\Omega}$.

⁸⁰ Meucci (2005).

La formulazione del problema permette di comprendere come l'obiettivo del *blending* di *prior information* e *view* voluto dagli autori sia quello di pervenire a dei rendimenti attesi che riflettano le visioni predittive dell'*asset manager*, comportando il minor allontanamento possibile dai rendimenti impliciti o di equilibrio.⁸¹ Così va intesa la miglior integrazione possibile fra due *set* informativi. La media della *posterior distribution* a cui si perviene è presentata nella (4.50). Essa viene spesso identificata come “master formula” di Black-Litterman:

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \times [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\Pi_{Eq.} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Q}] \quad (4.50)$$

La (4.51) evidenzia, invece, la varianza della *posterior distribution*:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} = [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \quad (4.51)$$

Sulla base di questi parametri di localizzazione e dispersione, la *posterior distribution* può essere formulata nella (4.52):

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{BL}; \boldsymbol{\Sigma}_{BL}) \quad (4.52)$$

Indubbiamente, particolare attenzione deve essere rivolta proprio alla “master formula” (4.50), in quanto essa fornisce l'input dei rendimenti per un convenzionale algoritmo di ottimizzazione *à la* Markowitz. Le considerazioni e/o le riflessioni essenziali riguardo a detta formula o, indifferentemente, riguardo alla *posterior mean*, ammettono la seguente esposizione schematica:

- i rendimenti attesi rappresentano nel modello di Black Litterman una combinazione e, ancor più precisamente, una media ponderata di *implied* o *equilibrium return* e *view*. Pertanto il modello, sia per il suo assetto formale sia per il suo impianto logico, esclude in modo categorico che la considerazione per le *view* possa concretizzarsi nella banale e diretta sostituzione con esse dei *prior return*;
- i fattori di ponderazione possono essere agevolmente identificati notando che l'espressione nella prima parentesi tonda della (4.50) costituisce un comune fattore moltiplicativo per i termini nella seconda parentesi tonda. Ciò rende ammissibile scrivere il “peso” $\mathbf{w}_{\Pi_{Eq.}}$ associato agli *implied return* e quello \mathbf{w}_Q abbinato alle *view*, rispettivamente, come $[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \times (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}$ e $[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \times \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}$. In quanto pesi, la loro somma restituisce una quantità unitaria ($\mathbf{w}_{\Pi_{Eq.}} + \mathbf{w}_Q = 1$);
- considerata la formulazione dei fattori di ponderazione, l'importanza acquisita dalle due fonti informative è direttamente collegata al loro grado di precisione, il quale presenta una relazione inversa con la rispettiva varianza. In pratica, l'importanza degli *equilibrium return*, a parità di altre circostanze, sarà maggiore quanto più è piccola la varianza $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, poiché ciò renderà più grande $(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}$ e, quindi, più precisa quella fonte. Similmente, l'importanza delle *view*, a parità di altre circostanze, sarà maggiore quanto più è piccola $\boldsymbol{\Omega}$, poiché ciò renderà più grande $\mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P}$;
- in assenza di opinioni soggettive dell'*asset manager*, la “master formula” restituisce gli *equilibrium return* come input per i rendimenti attesi. Ne consegue che, in mancanza di informazioni private, detta formula indirettamente conferma come soluzione di investimento più opportuna la detenzione del portafoglio di mercato.

⁸¹ A sostegno di quanto detto, si fa notare che la funzione obiettivo nella (4.49) prevede la minimizzazione della distanza (detta di Mahalanobis) tra due *set* informativi.

Nella sostanza, ciò che emerge dall'elencazione precedente è la capacità e volontà del modello di prevedere, per mezzo degli *equilibrium return*, un punto di partenza “comune” per la costruzione del portafoglio strategico (il *market portfolio*), dal quale ci si potrà allontanare a condizione che l'*asset manager* abbia una visione più *bullish* o *bearish* dei partecipanti al mercato per talune categorie di investimento o ravvisi l'esistenza all'interno del mercato di *mispricing* relativi.

Il portafoglio strategico finale differirà più o meno vistosamente dal *market portfolio* a seconda dello scarso o più forte convincimento dell'*asset manager* nelle informazioni proprietarie in suo possesso e/o da lui elaborate e in funzione del minore o maggior grado di incertezza connesso alle *prior estimate*.

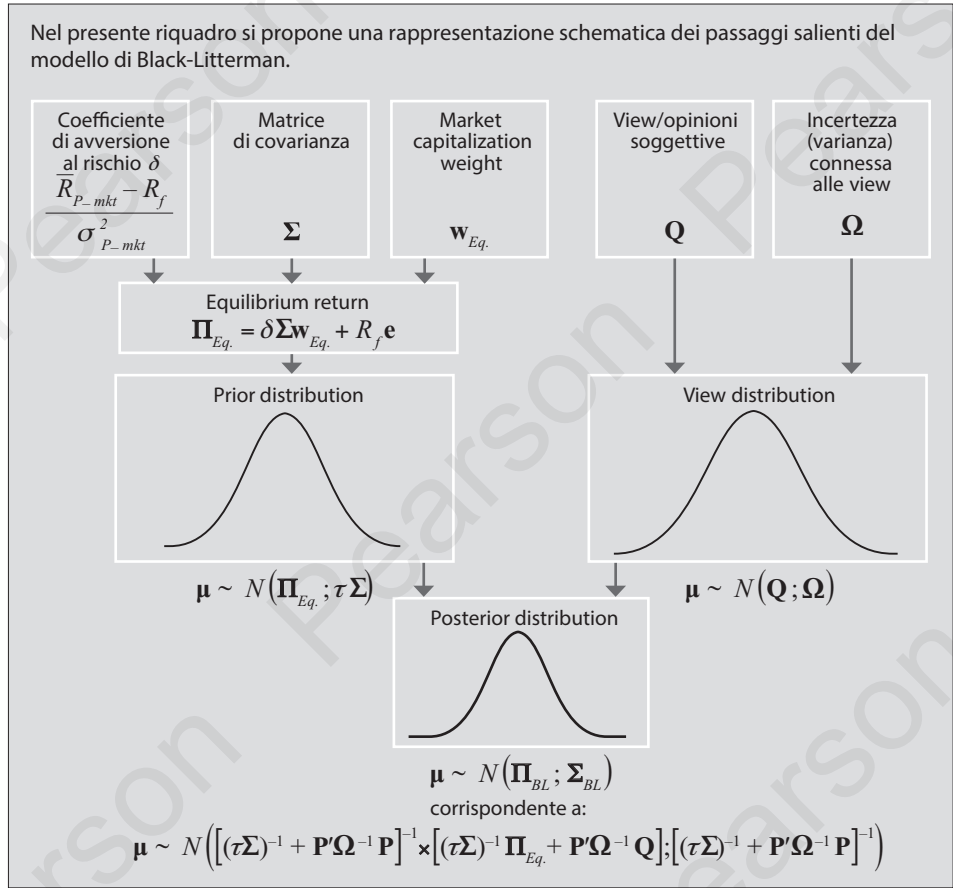
Un effetto distintivo della “master formula” di Black-Litterman è il poter produrre mutamenti dei rendimenti attesi di tutte le *asset class* rispetto agli *equilibrium return* nonostante le *view* formulate riguardino solo alcuni di essi. Quello descritto può considerarsi un punto di forza, poiché è indicativo del fatto che il modello riconosce che la formulazione esplicita di una *view* su una o più *asset class*, per via della struttura di correlazione o covarianza caratterizzante l'universo investibile, può implicare *view* implicite su altre *asset class*.⁸² Ciò nei fatti costituisce un meccanismo di razionalizzazione delle modalità di implementazione delle *view* più vistoso quanto maggiore è la correlazione tra le *asset class*. A livello matematico, è una conseguenza del prodotto matriciale tra \mathbf{P} , $(\tau\mathbf{\Sigma})^{-1}$, $\mathbf{\Omega}^{-1}$ e \mathbf{Q} ; ciò infatti non impedisce alle *view* (contenute appunto in un vettore di dimensioni $K \times 1$) di propagarsi a N *asset class* con l'ulteriore implicazione di rendere il vettore dei rendimenti attesi meno sensibile all'*estimation error* connesso alla singola *view*. Sulla caratteristica del modello appena discussa, può essere interessante richiamare il commento favorevole formulato da Lee: «It is this characteristic that makes the Black-Litterman model a much more practical model to use than mean-variance optimizers. While the latter simply computes the final optimized portfolio weights based on inputs with errors, the Black-Litterman model ‘spreads out’ the errors of the inputs to all others through the covariance matrices of returns and views so that the error-maximization problem of an optimizer is largely mitigated. This redistribution of errors is made to happen in a controlled fashion, consistent with the way these assets move with one another as well as the investor’s relative confidence about its views».⁸³

L'enfasi data sino a questo momento alla media della *posterior distribution* è spiegata dalla semplice constatazione che essa rappresenta il supporto più valido, nonché dotato di maggiore notorietà, per coloro che intendono affrontare l'*estimation risk* attraverso il miglioramento del processo di stima degli input più influenti: i rendimenti attesi. Risulta, invece, del tutto o quasi trascurato l'altro elemento descrittivo della *posterior distribution*, cioè la *posterior variance* indicata nella (4.51), poiché, generalmente, la *portfolio optimization* è portata a termine avvalendosi della matrice di covarianza originaria, vale a dire quella campionaria. In un'ottica di rappresentazione esaustiva del modello, è però doveroso segnalare che anche la *posterior variance* può concorrere al processo di ottimizzazione. A questo scopo, essa non deve essere considerata in maniera isolata, in quanto espressiva dell'incertezza annessa alla *posterior mean* e non della varianza dei rendimenti, bensì in

⁸² Nel suo lavoro “A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model”, Idzorek (2007, pag. 28) evidenzia questo tratto del modello di Black-Litterman scrivendo: «A single view causes the return of every asset in the portfolio to change from its implied equilibrium return, since each individual return is linked to the other returns via the covariance matrix of excess returns ($\mathbf{\Sigma}$)».

⁸³ Lee (2000, pag. 28).

Tabella 4.12 Il modello di Black-Litterman in sintesi.



congiunzione con la varianza originaria. In pratica, la covarianza attesa dei rendimenti delle *asset class* (Σ_{EX}) è identificata dall’espressione (4.53):

$$\Sigma_{EX} = \Sigma + [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} \tag{4.53}$$

equivalente alla (4.54):

$$\Sigma_{EX} = \Sigma + \Sigma_{BL} \tag{4.54}$$

Tra gli autori che si sono occupati del modello di Black-Litterman, solamente He e Litterman danno evidenza della questione appena illustrata.⁸⁴

A questo punto, possono dirsi ultimate sia l’esplorazione dei due *set* informativi cui attinge il modello di Black-Litterman sia l’esame del processo formale e logico che consente la loro combinazione. Con l’obiettivo di offrire una rappresentazione sintetica e organica del modello di Black-Litterman, la Tabella 4.12 riassume i principali passaggi che ne caratterizzano l’utilizzo pratico adattando la schematizzazione operata da Idzorek.⁸⁵

⁸⁴ He e Litterman (1999).

⁸⁵ Idzorek (2005).

4.8.4 Un esempio di applicazione del modello di Black-Litterman

Il presente paragrafo intende offrire un'illustrazione pratica del percorso attraverso il quale il modello di Black-Litterman perviene a un vettore di rendimenti attesi capace di integrare il "pensiero comune" con il "pensiero riservato" dell'*asset manager*.

Per quanto visto nei precedenti paragrafi, il primo adempimento richiesto all'*asset manager* è quello di fare chiarezza circa la composizione di portafoglio che si troverebbe a proporre se non fosse nelle condizioni di formulare delle proprie opinioni e, dunque, se non avesse motivi per "scommettere". È noto che essa dovrebbe configurarsi con un vettore di pesi proporzionali alle capitalizzazioni delle *asset class* presenti nell'universo investibile. Considerato il set di mercati inizialmente selezionato nella Tabella 4.3 e le rispettive capitalizzazioni a fine dicembre 2022, per effetto di questo criterio il *market portfolio* presenta la composizione della (4.55).

$$w_{Eq.} = \begin{pmatrix} \text{BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX} \\ \text{BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND} \\ \text{BLOOMBERG US TREASURY BOND} \\ \text{J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE} \\ \text{BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE} \\ \text{MSCI EUROPE} \\ \text{MSCI NORTH AMERICA} \\ \text{MSCI PACIFIC FREE} \\ \text{MSCI EMERGING MARKETS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,00\% \\ 13,71\% \\ 19,00\% \\ 4,75\% \\ 14,54\% \\ 7,37\% \\ 28,61\% \\ 3,95\% \\ 5,07\% \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Si procede poi con la stima del coefficiente di avversione al rischio δ che in media caratterizza i partecipanti al mercato. A tal fine, si ipotizza un premio per il rischio atteso su base annua pari al 2,50%, un rendimento *risk free* dell'1,50% e si fa uso della varianza storica del portafoglio di mercato poc'anzi descritto. Essa risulta pari a 0,00588 (approssimativamente corrispondente ad un livello di deviazione standard del 7,67%). In definitiva δ assume un valore pari a 4,25. A questo punto, conoscendo la composizione del *market portfolio*, il parametro δ e la matrice di covarianza storica, diviene possibile l'identificazione degli *equilibrium* o *implied returns* attraverso la formula (4.32) indicante la procedura di *reverse optimization* e con l'aggiunta, ai risultati così ottenuti, del rendimento privo di rischio. L'implementazione di tali passaggi matematici è proposta nella (4.56) che pone in evidenza anche la dimensione, nel caso specifico, dei *prior return*.

$$4,25 \times \begin{pmatrix} 0,000021 & 0,000017 & 0,000008 & -0,000021 & -0,000034 & -0,000090 & -0,000129 & -0,000086 & -0,000047 \\ 0,000017 & 0,002164 & 0,001457 & 0,001764 & 0,001582 & 0,000414 & 0,000634 & 0,000627 & 0,000357 \\ 0,000008 & 0,001457 & 0,009845 & 0,005592 & 0,008148 & -0,003581 & 0,001196 & 0,000602 & -0,003607 \\ -0,000021 & 0,001764 & 0,005592 & 0,009304 & 0,007261 & 0,005004 & 0,007286 & 0,007082 & 0,007124 \\ -0,000034 & 0,001582 & 0,008148 & 0,007261 & 0,008667 & 0,001148 & 0,005065 & 0,004390 & 0,001663 \\ -0,000090 & 0,000414 & -0,003581 & 0,005004 & 0,001148 & 0,020849 & 0,016304 & 0,014789 & 0,01849 \\ -0,000129 & 0,000634 & 0,001196 & 0,007287 & 0,005065 & 0,016304 & 0,019620 & 0,014620 & 0,016007 \\ -0,000086 & 0,000627 & 0,000602 & 0,007082 & 0,004390 & 0,014789 & 0,014620 & 0,019450 & 0,018340 \\ -0,000047 & 0,000357 & -0,003607 & 0,007124 & 0,001663 & 0,018849 & 0,016007 & 0,018340 & 0,030919 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,00\% \\ 13,71\% \\ 19,00\% \\ 4,75\% \\ 14,54\% \\ 7,37\% \\ 28,61\% \\ 3,95\% \\ 5,07\% \end{pmatrix} + 1,50\% \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Pi_{Eq.} = \begin{pmatrix} 1,48\% \\ 1,99\% \\ 2,96\% \\ 4,01\% \\ 3,70\% \\ 4,70\% \\ 5,58\% \\ 4,96\% \\ 4,99\% \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Considerato lo spazio dedicato all’esplorazione, sotto il profilo teorico, del modello di Black-Litterman, è superfluo ricordare che i *prior return* non hanno una prerogativa esclusiva nel condizionare i rendimenti attesi secondo il modello di Black-Litterman; vi concorrono, infatti, anche le *view*. Nella presente esemplificazione, si suppone che l’*asset manager* esprima due *view*, una relativa e una assoluta, così formulate:

- l’Azionario Paesi Emergenti sovraperformerà l’Azionario Nord America dello 0,25% su base annua;
- l’Obbligazionario governativo Paesi Emergenti mostrerà una performance su base annua del 3,00%.

Ad esse l’asset manager associa un livello di fiducia, rispettivamente, dell’80% e del 60%. Il contenuto di queste *view* presenta indubbiamente delle divergenze con gli *equilibrium return*. Secondo questi ultimi, infatti, l’indice *MSCI Emerging Markets* è battuto dall’indice *MSCI North America* dello 0,59% e l’indice *J.P. Morgan Embi Global Diversified Composite* presenta un rendimento atteso del 4,01%. Con riguardo alle *view* espresse è bene, in primo luogo, formulare il sistema di vincoli che esse configurano per la determinazione dei rendimenti attesi finali⁸⁶ e, in secondo luogo, procedere alla compilazione della matrice Ω , (4.57).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_{\text{BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX}} \\ \mu_{\text{BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND}} \\ \mu_{\text{BLOOMBERG US TREASURY BOND}} \\ \mu_{\text{J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE}} \\ \mu_{\text{BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE}} \\ \mu_{\text{MSCI EUROPE}} \\ \mu_{\text{MSCI NORTH AMERICA}} \\ \mu_{\text{MSCI PACIFIC FREE}} \\ \mu_{\text{MSCI EMERGING MARKETS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25\% \\ 3,00\% \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

Nella presente esemplificazione la matrice Ω ha dimensioni (2×2), essendo due le *view* espresse. Per la sua stesura si adotta la modalità indicata da Meucci in precedenza illustrata nella (4.48).⁸⁷ Essa implica l’utilizzo del parametro τ per la cui definizione si è preferita la logica di calibrazione suggerita dalla (4.37). Di conseguenza, essendo la stima della matrice di covarianza campionaria basata sull’uso di serie storiche di 240 dati mensili e considerato che l’universo investibile si compone di 9 *asset class*, τ è dato dalla (4.58):

$$\tau = \frac{1}{240 - 9} = 0,00433 \tag{4.58}$$

A questo punto dell’esemplificazione, entrambe le fonti informative di cui il modello di Black-Litterman si avvale sono state esplicitate e descritte; non resta, dunque, che applicare la “master formula”. La successiva Tabella 4.13 riporta i rendimenti *blended* da essa forniti a confronto con gli *equilibrium return*.

⁸⁶ Si veda la formula (4.40) nel Paragrafo 4.8.2.
⁸⁷ Meucci (2005).

Tabella 4.13 Confronto tra rendimenti di equilibrio e rendimenti attesi finali del modello di Black-Litterman.

	Rendimenti attesi di BL	Prior returns	Differenza
BARCLAYS 3 MONTH EURIBOR CASH INDEX	1,48%	1,48%	0,00%
BLOOMBERG EURO AGGREGATE TREASURY BOND	1,86%	1,99%	-0,12%
BLOOMBERG US TREASURY BOND	2,43%	2,96%	-0,53%
J.P. MORGAN EMBI GLOBAL DIVERSIFIED COMPOSITE	3,40%	4,01%	-0,61%
BLOOMBERG GLOBAL AGGREGATE CORPORATE	3,10%	3,70%	-0,59%
MSCI EUROPE	4,47%	4,70%	-0,23%
MSCI NORTH AMERICA	4,98%	5,58%	-0,60%
MSCI PACIFIC FREE	4,64%	4,96%	-0,32%
MSCI EMERGING MARKETS	5,07%	4,99%	0,08%

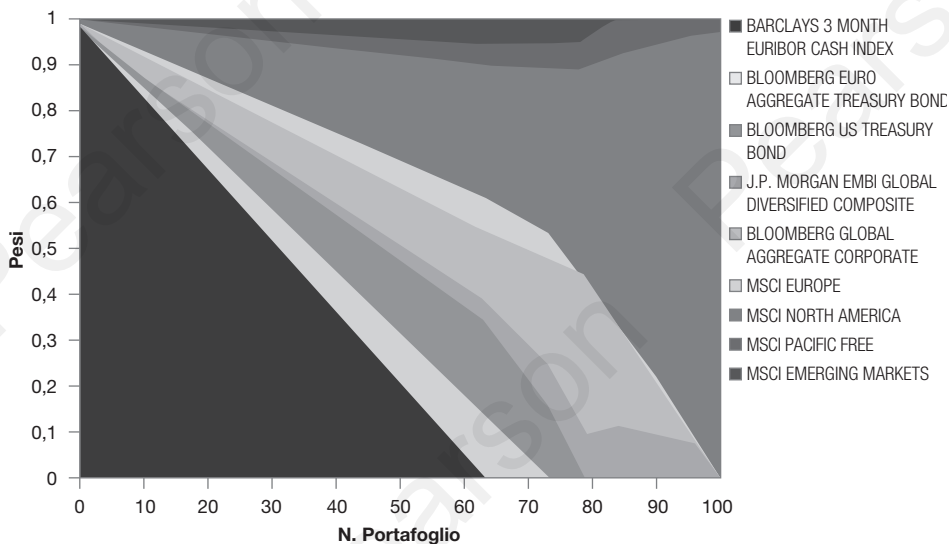
Il confronto tra i rendimenti attesi di Black-Litterman, rappresentativi della *posterior mean*, e i *prior* (o *equilibrium/implied*) *return* consente di avanzare alcune considerazioni di rilievo per l'utente di un simile modello:

- i rendimenti delle *asset class* coinvolte dalle *view* si muovono nella direzione da queste ultime suggerita, ma con una intensità tale da non implicare un totale adattamento alle stesse dei rendimenti finali; ciò per effetto dei margini di incertezza associati alle *view* (attraverso un livello di confidenza inferiore al 100%). A conferma di quanto appena detto, si può notare che la “master formula” ha determinato l'abbassamento del rendimento atteso per l'*asset class* Obbligazionario governativo Paesi Emergenti dal 4,01% al 3,40%, a fronte di una *view* molto convinta che prospettava l'1% di caduta, e che la misura attesa di sovraperformance di *MSCI Emerging Markets* rispetto a *MSCI North America* risulta stimata solamente nello 0,09%, quando la *view* formulata delineava un vantaggio dello 0,25% a partire da una situazione di equilibrio in base alla quale era *MSCI North America* e non *MSCI Emerging Markets* a vantare un vantaggio di rendimento approssimativamente di 60 *basis points*;
- i rendimenti attesi di Black-Litterman esprimono uno scostamento più o meno accentuato dai rendimenti di equilibrio pressoché per tutte le *asset class* dell'universo investibile e non solamente per quelle chiamate in causa dalle *view* a dimostrazione del fatto che al modello non sfuggono le interazioni tra le *asset class*. Ad esempio, l'indebolirsi, secondo le opinioni dell'*asset manager*, della posizione relativa dell'Azionario Nord America è recepita, non solo con un lieve innalzamento della performance dell'Azionario Paesi Emergenti e più percepibile abbassamento del rendimento atteso proprio dell'Azionario Nord America, ma anche con quella dell'*asset class* con la quale quest'ultimo presenta una robusta correlazione positiva, vale a dire l'Azionario Europa. Parimenti, la *view* assoluta inerente l'Obbligazionario governativo Paesi Emergenti ha dei riflessi, anche se in termini assoluti meno consistenti, sui rendimenti attesi delle altre componenti *bond*. Per tutte, si prospetta un decremento di rendimento rispetto ai *prior return*.

Nel Paragrafo 4.5, si era sottolineato l'orientamento degli approcci bayesiani ad operare sull'*estimation side*, anziché sul *model side*. Nel caso del modello di Black-Litterman,

Figura 4.20

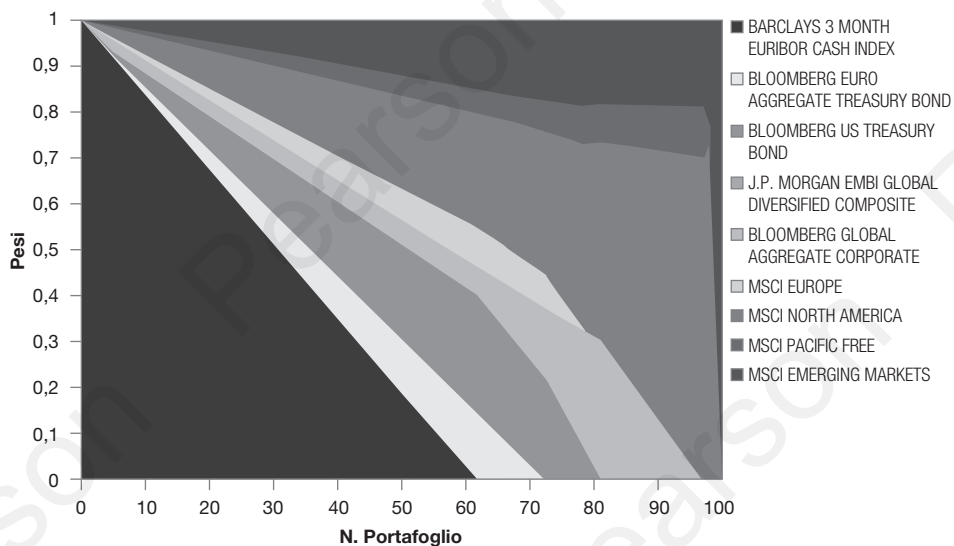
La composizione dei portafogli della frontiera efficiente basata sull'impiego degli equilibrium o implied return.



l'output di un simile sforzo di stima ha condotto ad un nuovo set di rendimenti poc' anzi oggetto di commenti. Nonostante esso sia stato identificato attraverso un processo che ha preso avvio dalla *reverse optimization*, la quale implica l'utilizzo di un certo coefficiente δ , la sua utilità pratica sicuramente non si esaurisce nell'effettuare un'ottimizzazione media-varianza orientata all'individuazione del solo portafoglio coerente con quel coefficiente δ e nel porre in evidenza le sue deviazioni dall'originario *market portfolio*. È, infatti, indubbio che i rendimenti attesi secondo il modello di Black-Litterman costituiscono un input nuovo per un'ottimizzazione orientata alla costruzione di un intero set di portafogli efficienti. Data questa consapevolezza, si è ritenuto opportuno rappresentare, nella Figura 4.20 e nella Figura 4.21, le composizioni dei portafogli che una classica *Mean-Variance Optimization* avrebbe generato qualora fosse stata alimentata, in un primo caso, con gli

Figura 4.21

La composizione dei portafogli della frontiera efficiente basata sull'impiego dei rendimenti attesi di Black-Litterman.



equilibrium o *implied return* e, in un secondo caso, con i rendimenti attesi di Black-Litterman.

Al termine di questo esempio di applicazione del modello di Black-Litterman e di fronte a questi grafici ad area, è ammissibile avanzare due considerazioni. La prima è la conferma della capacità della *posterior mean* di Black-Litterman di indirizzare, nell'ambito di un processo di ottimizzazione, le composizioni efficienti nel senso indicato dalle *view* tenuto conto del livello di incertezza che le caratterizza. Osservando con attenzione le Figure 4.20 e 4.21, in effetti, si nota un irrobustimento notevole del ruolo giocato da *MSCI Emerging Markets*, in corrispondenza dei portafogli più estremi, essendo quest'ultimo divenuto, per effetto della *view* relativa, l'asset per il quale l'attesa di performance è superiore. Oltre a ciò, si evidenzia la rimozione di qualsiasi esposizione verso *J.P. Morgan Embi Global Diversified Composite* a seguito della penalizzazione del suo rendimento atteso con il conseguente ampliamento delle allocazioni assegnate a *Bloomberg US Treasury Bond* e a *Bloomberg Global Aggregate Corporate*. È dunque vero che il modello di Black-Litterman consente all'*asset manager* di "far sentire la propria voce" (in modo più o meno incisivo). La seconda e più cruciale considerazione consiste nell'affermare che proprio nei grafici ad area appena proposti va ravvisata la prova o la conferma dell'opportunità di perseguire l'integrazione tra approcci euristici e bayesiani nell'ambito del processo di asset allocation strategica.⁸⁸ Anche se l'ovvia sensazione iniziale per l'*asset manager* che osserva la Figura 4.21 è quella di sentirsi maggiormente protagonista di quel processo, è però innegabile che quella stessa rappresentazione pone ancora in evidenza alcune delle proprietà indesiderabili dei portafogli esaminate nel Paragrafo 4.3.

Al fine di persuadere all'adozione di un approccio ibrido, si è ritenuto interessante mostrare nella Figura 4.22 come si sarebbero modificate le composizioni di portafoglio, una volta costruite attraverso l'uso abbinato di rendimenti di equilibrio e *Resampling*, se poi fossero intervenute, da parte dell'*asset manager*, le stesse *view* già in precedenza ipotizzate in questo paragrafo e, dunque, se fossero stati identificati gli stessi rendimenti attesi finali secondo il modello di Black-Litterman, ma questi ultimi fossero stati impiegati come vettore delle medie della normale multivariata di cui si avvale la procedura di *Resampling*, anziché essere utilizzati per porre in essere una classica *Mean-Variance Optimization*. Si può osservare che i portafogli ottenuti attraverso l'integrazione di rendimenti attesi finali di Black-Litterman e *Resampling* superano le caratteristiche indesiderabili dei portafogli precedentemente rappresentati in Figura 4.21 riuscendo, comunque, ad assecondare, in modo più disciplinato, le *view* dell'*asset manager*. A riprova di ciò, vale la pena segnalare che, nell'applicazione in esame, l'esposizione media dei portafogli verso l'Obbligazionario governativo Paesi Emergenti scende dal 6,40% al 4,81% passando dal caso in cui essi sono dedotti da "*Equilibrium returns + Resampling*" al caso in cui l'esercizio di *portfolio construction* è basato su "*Rendimenti attesi finali di Black-Litterman + Resampling*". Contestualmente, per l'Azionario Paesi Emergenti, coinvolto come *asset class* sovraperformante l'Azionario Nord America nell'ambito della *view* relativa, si constata un incremento al 10,33% dal 6,57% dell'esposizione media nell'ambito dei portafogli ricampionati.

⁸⁸ Sul tema del connubio tra metodi euristici e metodi bayesiani si rinvia a Barros Fernandes *et al.* (2012) e a Braga (2004).

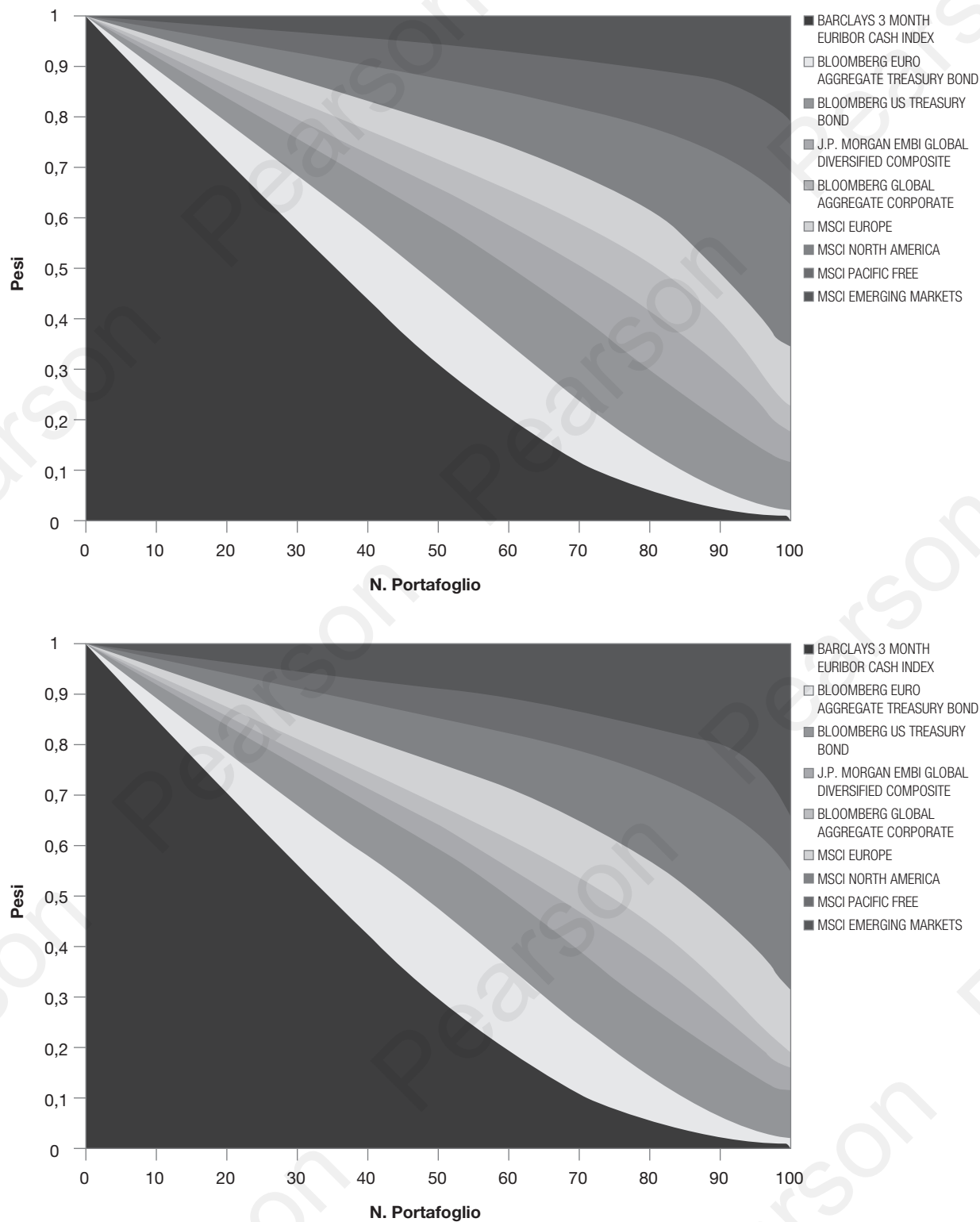


Figura 4.22 Composizione dei portafogli sulla base di "Equilibrium return + Resampling" versus portafogli sulla base di "Black-Litterman return + Resampling".

4.9 La verifica out of sample per mettere alla prova le strategie di investimento

Nelle pagine precedenti di questo capitolo, è stato portato a termine un esame alquanto esteso e dettagliato delle metodologie di *portfolio construction* che hanno le proprie radici nella *Mean-Variance Optimisation* alla quale, tra l'altro, è bene ribadirlo, hanno apportato affinamenti e/o integrazioni, per le ragioni già illustrate, con l'effetto conclusivo di giungere a proposte di asset allocation strategica più ragionevoli, più diversificate e più intuitive. È immediato constatare che, nel fare questo, è stato utilizzato integralmente un dataset di T rendimenti mensili, con $t = 1, 2, \dots, T$, dove $T = 240$, ordinati dal meno recente (gennaio 2003) al più recente (dicembre 2022) disponibili per ciascuna *asset class* i con $i = 1, \dots, N$ dove $N = 9$, che ha permesso di formulare le stime campionarie con cui “lanciare” l'ottimizzazione classica, con cui caratterizzare la distribuzione normale multivariata indispensabile per il *Resampling*, con cui rappresentare la struttura di rischio (matrice di varianza – covarianza) associata ai rendimenti di equilibrio ma, generalmente, anche ai rendimenti attesi finali nell'ambito del modello di Black-Litterman. Stante l'obiettivo fondamentale, fino a questo momento, di mostrare l'impatto dei differenti approcci sul comportamento dei vettori dei pesi $(w_1, \dots, w_i, \dots, w_N)$ descrittivi delle *strategic asset allocation solution* proposte, tale procedimento sembra non dare adito a particolari critiche e/o obiezioni.

Tuttavia, se ci si mette nei panni degli *asset manager*, senza sforzi particolari e, anzi, istintivamente, sovengono ulteriori interessanti interrogativi di fronte ai differenti approcci di *portfolio construction*, per poterli valutare in chiave comparativa. Ad esempio, sono più che legittime domande del tipo: qual è il grado di efficienza finanziaria delle diverse strategie di *portfolio construction*? Quanto è intensa l'attività di *trading*/il *turnover* richiesto da ciascuna di esse? A quale tipo di *crash* (*drawdown*) può esporre ciascuna di esse?⁸⁹ Ecc.

Nel voler cercare risposte agli interrogativi avanzati, ci si rende conto della necessità di disporre dei rendimenti periodici che le strategie di investimento realizzano, del montante che conseguono, ma avendo sfruttato l'intero dataset disponibile per le stime degli input non è fattibile avere tutto ciò. Da un lato, infatti, sarebbe privo di senso testare il vettore dei pesi dei portafogli suggerito da una strategia impiegando i rendimenti presenti nel dataset come se quell'assetto dei portafogli fosse stato implementato all'inizio, ovvero in $t = 1$, perché vorrebbe dire valutare una strategia impiegando un set informativo già noto e già sfruttato proprio al fine di determinare le proposte di investimento raccomandate dalla strategia stessa. Detto in modo più rigoroso, una procedura così impostata risulta viziata dall'ipotesi irrealistica e distorsiva che l'*asset manager* affronti il problema di *portfolio construction* avendo una conoscenza perfetta di informazioni *forward looking*. Per converso, considerando, come in effetti è, i portafogli di ciascuna strategia costruiti al tempo T sulla base di dati che si estendono da $t = 1$ fino a T , non sono conoscibili i rendimenti delle *asset class* futuri rispetto a quel momento (ovvero i rendimenti in $T + 1$, $T + 2, \dots$) e pertanto la valutazione delle *investment strategie* è di nuovo non realizzabile, a meno di accettare stranamente e inspiegabilmente un momento T molto risalente rispetto al momento corrente in cui ci si trova a dover identificare delle soluzioni di *asset allocation* strategica.

Le criticità appena evidenziate sono di aiuto nel far emergere le caratteristiche desiderabili e appropriate sulle quali deve fondarsi una valida procedura di valutazione di ap-

⁸⁹ Per le misure o indicatori espressivi di efficienza finanziaria, si rinvia al Capitolo 8, mentre per il concetto e la misurazione del *drawdown* si rinvia al Capitolo 5.

procci differenti per l'*asset allocation* strategica. In modo schematico, esse possono essere così descritte:

- considerare una pluralità di *asset allocation experiment* provenienti da ciascun approccio di *asset allocation*;
- evitare di presumere il possesso, da parte dell'asset manager, di informazioni perfette sul futuro comportamento delle *asset class* il che, a livello pratico, significa evitare di valutare il comportamento dei portafogli raccomandati sulla base delle stesse informazioni che hanno concorso alla loro costruzione;
- simulare il comportamento dei portafogli indicati da una determinata metodologia di *portfolio construction* sulla base di informazioni non note, in pratica volutamente ignote in fase di identificazione del loro assetto.

È idea condivisa, in letteratura finanziaria, che la procedura in grado di ottemperare a questi requisiti debba identificarsi in quella proposta da DeMiguel *et al.*⁹⁰ Quest'ultima è correttamente descrivibile come una procedura di analisi *out of sample* fondata, per quanto attiene alle stime richieste, sull'impiego di un meccanismo o di una tecnica di finestra mobile, detta tecnica *rolling window*.

Per una più agevole comprensione, è bene proporre una esposizione nei seguenti termini: dato un dataset composto, per le N *asset class* dell'universo investibile, da T rendimenti periodici (ad esempio, nel presente contributo, come già noto, $T = 240$ rendimenti mensili), si utilizza un intervallo temporale di estensione pari a M periodi dove, perentoriamente, $M < T$ e, ad esempio, dove $M = 60$ mesi, 120 mesi... e, in generale, dove M identifica un intervallo temporale non eccessivamente ristretto (di norma non inferiore a 5-7 anni) per ricavare le stime campionarie (dunque *in sample*) degli input richiesti per l'applicazione di un determinato approccio di *portfolio construction* e, conseguentemente, per determinare i relativi vettori dei pesi degli *optimal portfolio*. Le *asset class exposure* dei portafogli così ottenuti sono impiegate per calcolare i rendimenti che quei portafogli avrebbero registrato nei successivi F periodi (dunque *out of sample*), dove F è significativamente inferiore a M , ad esempio, $F = 3, 6, 12$ mesi. Trascorso l'intervallo di durata F , il procedimento si ripete nel senso che una nuova finestra di stima degli input, sempre di estensione M e con punto di avvio spostato in avanti, rispetto a quella precedente, proprio di F periodi permette di giungere a nuovi input stimati e, dunque, all'identificazione di nuovi *optimal portfolio weight* per uno specifico approccio di *portfolio construction*. Anche per essi, si verificherà quali rendimenti di portafoglio sarebbero stati prodotti nei successivi F periodi. Il meccanismo fondato su *rolling window* viene reiterato e prosegue fino a quando la finestra rolling utilizzata per la stima giunge a sfruttare anche il rendimento periodico più recente per le *asset class* appartenenti all'universo di investimento; va da sé che con riguardo al dataset disponibile per il presente contributo, tale condizione si verifica allorché si giunge alla finestra di stima che include il 240-esimo rendimento (quello di dicembre 2022).

Ciò che più merita di essere enfatizzato della decritta procedura di DeMiguel *et al.*, costituendone un vero e proprio punto di forza, è la capacità di produrre, per i portafogli discendenti da una specifica metodologia di *portfolio construction*, dei rendimenti *out of sample*, cioè, riferiti ad *holding period* successivi all'orizzonte temporale sulla base del quale gli stessi portafogli sono stati stimati; quindi, rendimenti realmente caratterizzati da una natura prospettica, *forward looking*, sebbene il tutto avvenga impiegando un dataset di rendimenti storici. Per questo, possono ritenersi soddisfatti i requisiti ideali enunciati in precedenza. Quale esito finale, riuscendo a simulare condizioni realistiche per un asset mana-

⁹⁰ DeMiguel *et al.* (2009)

ger, la procedura restituirà per un determinato approccio di *portfolio construction* complessivamente $T - M$ rendimenti *out of sample* e avrà permesso la generazione di numerosi *asset allocation experiment*. Secondariamente, per una maggiore consapevolezza della procedura stessa, è bene richiamare gli aspetti che costituiscono le scelte attribuite al suo utilizzatore (sebbene, come visto, possano essere fornite delle indicazioni generali), ovvero:

- l'estensione costante dell'*estimation window*, vale a dire la scelta di M ;
- la cosiddetta *rebalancing frequency* implicita nella scelta di F ; evidentemente se F fosse posta pari a 6 mesi o a 12 mesi, significherebbe che, nell'applicare la procedura, si assume un ribilanciamento e/o revisione di portafoglio, rispettivamente, semestrale e annuale.

A dire il vero, questo secondo aspetto genera la necessità di un nuovo approfondimento. Esso è collegato al fatto che, per ciascun *asset allocation experiment*, l'orizzonte di analisi del comportamento *out of sample* è multiplo rispetto alla periodicità che caratterizza i rendimenti storici disponibili.

Per estrema chiarezza e, al contempo, allo scopo di permettere un rapido riepilogo, va detto che se si considera il dataset utilizzato in questo contributo e si ipotizza di ricorrere alla procedura avanzata da DeMiguel con il fine ultimo, a titolo esemplificativo, di valutare quali sarebbero stati gli effetti di affidarsi, come strategia di investimento, al portafoglio meno rischioso suggerito dalla classica *Mean-Variance Optimisation* (come noto, si tratta del *GMVP*), è facile convenire che, in caso di $M = 60$ e di $F = 6$, si otterrebbero 180 rendimenti mensili *out of sample* (successivamente utili per determinare il montante della strategia, il crash/drawdown che l'avrebbe caratterizzata ecc.) e si effettuerebbero 31 *asset allocation experiment*⁹¹ ciascuno dei quali (fuorché evidentemente l'ultimo) consentirebbe, con l'aiuto dei rendimenti storici mensili disponibili nel database, di calcolare i rendimenti *out of sample* del portafoglio nello specifico semestre successivo alla sua stima. Ebbene, come si nota da queste parole, l'*holding period* futuro (*out of sample*) per ciascun *asset allocation experiment* corrisponde ad un semestre, ma i rendimenti utilizzabili presenti nel database sono mensili!

Senza alcun dubbio, vi è dunque l'esigenza di determinare dei rendimenti multiperiodali di portafoglio a partire da rendimenti uniperiodali per ciascuna *asset class* $R_{i,t}$. Al riguardo, la domanda che viene a delinearci è se, a tale scopo, sia ragionevole adottare una metodologia che prevede di applicare i rendimenti uniperiodali delle *asset class* ad un vettore di pesi costante in corrispondenza di ciascun periodo t presente nell'*holding period* futuro o se, diversamente, sia sensato ricorrere ad una metodologia che in ciascun momento t riconosce che i pesi possono essersi modificati rispetto al momento iniziale e ad ogni step intermedio per effetto del deprezzamento/apprezzamento delle *asset class*.

La prima metodologia, identificabile come *constant o fixed weight approach*, ha raccolto diverse critiche nell'ambito di contributi scientifici. Liu e Strong, come pure Alexeev e Ignatieva⁹² osservano che un simile approccio presuppone che l'investitore riconduca il portafoglio all'assetto dei pesi iniziali (corrispondenti a quelli suggeriti dalla stima *in sample*) con un intervento di ribilanciamento eseguito in ogni periodo in base alla frequenza di campionamento dei rendimenti nel dataset utilizzato.⁹³ Tale modo di procedere, sebbene

⁹¹ Per il 31-esimo *asset allocation experiment*, il dataset disponibile non avrebbe più i rendimenti delle *asset class* per la costruzione dei rendimenti *out of sample* del portafoglio; difatti, come si è scritto, i rendimenti mensili *out of sample* complessivi saranno 180 (non 186).

⁹² Liu e Strong (2008); Alexeev e Ignatieva (2021).

⁹³ In sostanza, il portafoglio dovrebbe essere ribilanciato ciascun mese dell'*holding period out of sample* se sono usati rendimenti mensili, ogni settimana se sono usati rendimenti settimanali ecc.

non manchi di popolarità per la sua semplicità e trattabilità algebrica,⁹⁴ è comprensibilmente ritenuto dagli autori citati impraticabile per un reale investitore implicando costi di transazione proibitivi. Sempre in tema criticità, il problema però cruciale che dovrebbe far desistere dal suo impiego nell'ambito della procedura di analisi *out of sample* proposta da DeMiguel è l'incapacità di riflettere/catturare i reali effetti, in termini di ricchezza, registrati da un investitore che detiene il portafoglio scaturito dalla stima *in sample*.

La seconda metodologia, identificata come *buy-and-hold approach*, prevede che il rendimento multiperiodale di un portafoglio costruito *in sample* sull'orizzonte futuro F sia calcolato a partire da rendimenti uniperiodali che rappresentano una media ponderata dei rendimenti delle *asset class* dove il peso associato a ciascuna di esse è mutevole in corrispondenza di ciascuno step t per il fatto di risentire di quanto ad esse accaduto, in termini di apprezzamento/deprezzamento, nei precedenti periodi (cioè da $\tau = 0, \dots, t - 1$). Detto in modo più rigoroso, il vettore dei pesi corretto da applicare al calcolo del rendimento di portafoglio per il periodo t è una funzione *time-varying* della performance cumulata di ciascuna *asset class* dall'avvio dell'*holding period out of sample* che si vuole considerare fino all'inizio del momento t in cui ci si trova. Quanto esposto ammette una rappresentazione più formale. Infatti, il calcolo del rendimento di portafoglio nel periodo t sulla base di *updated weight* o *time-varying weight* può essere, analiticamente, così scritto:

$$R_{t,p} = \sum_{i=1}^N w_{t-1,i} \cdot R_{t,i} \quad (4.59)$$

Nell'ambito della (4.59), gli *updated weight* $w_{t-1,i}$, ancora nella forma di valori monetari, possono essere così riformulati:

$$\sum_{i=1}^N w_{t-1,i} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{w_{0,i} \prod_{\tau=1}^{t-1} (1 + R_{\tau,i})}{\sum_{j=1}^N w_{0,j} \prod_{\tau=1}^{t-1} (1 + R_{\tau,j})} \right) \cdot R_{t,i} \quad (4.60)$$

Sebbene la notazione della (4.60) possa apparire piuttosto farragginosa e complessa, nella sostanza propone nel numeratore della quantità tra parentesi tonde il valore monetario dell'investimento nell'*asset class* i cumulato fino all'inizio del periodo t (come dire, fino al termine di $t - 1$), mentre il denominatore della stessa quantità cattura il valore monetario dell'intero portafoglio nello stesso momento. Ciò che, conclusivamente, va doverosamente segnalato è il fatto che solo gli $R_{t,p}$ così ottenuti assicurano che la capitalizzazione composta (cosiddetto *compounding*) dei rendimenti uniperiodali restituisca il rendimento multiperiodale di un investitore *buy-and-hold* e rifletta correttamente l'effetto ricchezza dell'investimento effettuato e detenuto.

La Tabella 4.14 propone l'applicazione delle metodologie discusse nell'ipotesi di un portafoglio con valore iniziale pari a 100 euro equamente ripartito sull'*asset class* Y e Z, per le quali sono ipotizzati i rendimenti uniperiodali indicati nelle prime 2 colonne.

A conferma di quanto sopra affermato, solo il *compounding* dei rendimenti uniperiodali calcolati nell'ambito del *buy-and-hold approach* è in grado di restituire la performance multiperiodale del +6,39%, coerente con l'effetto di incremento della ricchezza registrato dall'investitore. Difatti:

$$(1 + 5,500\%) \times (1 - 0,265\%) \times (1 + 0,530\%) \times (1 + 0,578\%) - 1 = +6,39\% \quad (4.61)$$

⁹⁴ Il calcolo dei rendimenti di un portafoglio nei periodi dell'orizzonte temporale *out of sample* è semplicemente dato dal prodotto tra una matrice $F \times N$, contenente i rendimenti di ciascuna delle N *asset class* in ogni momento dell'intervallo F con il vettore $N \times 1$ dei pesi iniziali scaturiti dalla stima *in sample*.

Tabella 4.14 Fixed Weight Approach e Buy-and-Hold Approach per la generazione dei rendimenti uniperiodali.

Rendimenti uniperiodali Y	Rendimenti uniperiodali Z	Rend. Portafoglio Fixed Weight Approach	Investimento monetario in Y (buy-and-hold approach)	Investimento monetario in Z (buy-and-hold approach)	Valore di Portafoglio (buy-and-hold approach)	Pesi % time-varying Y (buy-and-hold approach)	Pesi % time-varying Z (buy-and-hold approach)	Rend. Portafoglio Buy-and-Hold Approach
			50	50	100	50,00%	50,00%	
+15%	-4%	+5,500%	57,50	48	105,5	54,50%	45,50%	+5,500%
-8%	+9%	+0,500%	52,90	52,32	105,22	50,28%	49,72%	-0,265%
+6%	-5%	+0,500%	56,07	49,70	105,78	53,01%	46,99%	+0,530%
-6%	+8%	1,000%	52,71	53,68	106,39			+0,578%

La ripetizione del calcolo appena presentato utilizzando i rendimenti uniperiodali per il caso del *fixed weight approach* produrrebbe, invece, un *return bias*, restituendo un +7,62% (anziché +6,39%) incongruente con la ricchezza che avrebbe effettivamente detenuto un investitore *buy-and-hold*.

In chiusura, non resta, dunque, che riaffermare la raccomandazione di condurre l'analisi *out of sample* basata su un meccanismo *rolling window* secondo quanto indicato da DeMiguel ricorrendo, nell'ambito dell'*holding period* futuro costruito per ciascun *asset allocation experiment*, a rendimenti uniperiodali scaturiti dall'uso di un *buy-and-hold approach*.

Bibliografia

- Alexeev V., Ignatieva K.: "To Rebalance or Not to Rebalance: Portfolio risk may be larger than you think", *International Review of Finance*, v. 21, n. 4, 2021.
- Allaj E.: "The Black-Litterman model: a consistent estimation of the parameter tau", *Financial Markets and Portfolio Management*, v. 27, 2013.
- Amenc N., Goltz F., Lioui A.: "Practitioner Portfolio Construction and Performance Measurement: Evidence from Europe", *Financial Analysts Journal*, v. 67, n. 3, 2011.
- Barros Fernandes J.L., Haas Ornelas J.R., Martínez Cusicanqui O.A.: "Combining Equilibrium, Resampling, and Analyst's Views in Portfolio Optimization", *Journal of Banking and Finance*, v. 36, n. 5, 2012.
- Best M., Grauer R.: "On the Sensitivity of Mean Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means. Some Analytical and Computational Results", *The Review of Financial Studies*, v. 4, n. 2, 1991.
- Bevan A., Winkelmann K.: "Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience", *Fixed Income Research*, Goldman Sachs, June, 1998.
- Black F., Litterman R.: "Global Asset Allocation with Equities, Bonds and Currencies", *Fixed Income Research*, Goldman Sachs, October, 1991.
- Black F., Litterman R.: "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal*, v. 48, n. 5, 1992.
- Braga M.D.: "Mean Variance Efficiency: da Markowitz a... oggi", in *L'innovazione finanziaria – Osservatorio Newfin 2004 – Corporate, investment e retail banking. Gestione del risparmio, mercati finanziari e previdenza*, a cura di Anderloni L., Bancaria Editrice, Roma, 2004.
- Braga M.D.: *Il risk budgeting nell'asset management. Strumenti e tecniche per la misurazione, scomposizione e allocazione del rischio*, Bancaria Editrice, Roma, 2008.
- Braga M.D., Natale F.P.: "Active Risk Sensitivity to Views Using the Black-Litterman Model", *Journal of Asset Management*, v. 13, n. 1, 2012.
- Ceria S., Stubbs R.A.: "Incorporating Estimation Errors into Portfolio Selection: Robust Portfolio Construction", *Journal of Asset Management*, vol. 7, n. 2, 2006.
- Cheung W.: "The Black-Litterman Model Explained", *Journal of Asset Management*, v. 11, n. 4, 2010.
- Chopra V.K., Ziemba W.T.: "The Effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice", *Journal of Portfolio Management*, v. 19, n. 2, 1993.
- Deguest R., Martellini L., Meucci A.: "Risk Parity and Beyond: From Asset Allocation to Risk Allocation Decisions", *SSRN Working Paper*, 2013.
- DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R.: "Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient Is the 1/N Portfolio Strategy?", *Review of Financial Studies*, v. 22, n. 5, 2009.

- Doomnik J.A., Hansen H.: "An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 70, n. 1, 2008.
- Drobetz W.: "How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work", *Financial Markets and Portfolio Management*, v. 15, n. 1, 2001.
- Eichhorn N., Gupta D., Stubbs F.: "Using Constraints to Improve the Robustness of Asset Allocation", *Journal of Portfolio Management*, v. 24, n. 3, 1998.
- Fabozzi F.J., Kolm P.N., Pachamanova D.A., Focardi S.M.: *Robust Portfolio Optimization and Management*, Wiley, Hoboken, 2007.
- Frankfurter G.M., Phillips H.E., Seagle J.P.: "Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Means, Variances and Covariances", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 5, 1971.
- Frost P.A., Savarino J.E.: "Portfolio Size and Estimation Risk", *Journal of Portfolio Management*, vol. 12, n. 4, 1986a.
- Frost P.A., Savarino J.E.: "An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, 1986b.
- Frost P.A., Savarino J.E.: "For Better Performance: Constrain Portfolio Weights", *Journal of Portfolio Management*, v. 15, n. 1, 1988.
- Fuhrer A., Hock T.: "Uncertainty in the Black-Litterman model: Empirical estimation of the equilibrium", *Journal of Empirical Finance*, v. 72, 2023.
- Fusai G., Meucci A.: "Al di là delle opinioni", *Risk Italia*, novembre, 2003.
- Garlappi L., Uppal R., Wang T.: "Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-prior Approach", *Review of Financial Studies*, v. 20, n. 1, 2007.
- Grauer R., Shen F.: "Do Constraints Improve Portfolio Performance?", *Journal of Banking and Finance*, v. 24, n. 8, 2000.
- He G., Litterman R.: "The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios", *Investment Management Research*, Goldman Sachs, December, 1999.
- Herold U., Maurer R.: "Bayesian Asset Allocation and U.S. Domestic Bias", *Financial Analysts Journal*, v. 59, n. 6, 2003.
- Herold U., Maurer R.: "Portfolio Choice and Estimation Risk. A Comparison of Bayesian and Heuristic Approaches", *ASTIN Bulletin*, v. 36, n. 1, 2006.
- Idzorek T.: "A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model", in *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, a cura di Satchell S., Academic Press, London, 2007.
- Jagannathan R., Ma T.: "Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps", *Journal of Finance*, v. 58, n. 4, 2003.
- Jobson J.D., Korkie B.: "Estimation for Markowitz Efficient Portfolios", *Journal of the American Statistical Association*, v. 75, n. 371, 1980.
- Jobson J.D., Korkie B.: "Putting Markowitz Theory to Work", *Journal of Portfolio Management*, v. 7, n. 4, 1981.
- Jondeau E., Rockinger M.: "Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments", *European Financial Management*, v. 12, n. 1, 2006.
- Jorion P.: "International Portfolio Diversification with Estimation Risk", *Journal of Business*, v. 58, n. 3, 1985.
- Jorion P.: "Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, 1986.
- Jorion P.: "Bayesian and CAPM Estimators of the Mean: Implications for Portfolio Selection", *Journal of Banking and Finance*, v. 15, n. 3, 1991.
- Jorion P.: "Portfolio Optimization in Practice", *Financial Analysts Journal*, v. 15, n. 1, 1992.
- Kan R., Zhou G.: "Optimal Portfolio Choice with Parameter Uncertainty", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 42, n. 3, 2007.
- Kon S.J.: "Models of Stock Returns – A Comparison", *Journal of Finance*, v. 39, n. 1, 1984.
- Kroll Y., Levy H., Markowitz H.M.: "Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization", *Journal of Finance*, v. 39, n. 1, 1984.
- Lee W.: *Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*, Wiley, Hoboken, 2000.
- Levy H., Markowitz H.M.: "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *American Economic Review*, v. 69, n. 3, 1979.
- Liu W., Strong N.: "Biases in decomposing holding-period portfolio returns", *Review of Financial Studies*, v. 21, 2008.
- Mardia K.W.: "Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications", *Biometrika*, v. 57, n. 3, 1970.
- Markowitz H.M.: "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, 1952.
- Markowitz H.M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, New York, 1959.
- Markowitz H.M.: *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Blackwell, Oxford, 1987.
- Markowitz H.M.: "The Early History of Portfolio Theory: 1600–1960", *Financial Analysts Journal*, v. 55, n. 4, 1999.
- Markowitz H.M., Usmen N.: "Resampled Frontiers Versus Diffuse Bayes: An Experiment", *Journal of Investment Management*, v. 1, n. 4, 2003.
- Martellini L., Ziemann V.: "Improved Estimates of Higher-Order Comoments and Implications for Portfolio Selection", *The Review of Financial Studies*, v. 23, n. 4, 2010.
- Meucci A.: *Risk and Asset Allocation*, Springer, Heidelberg, 2005.
- Meucci A.: "The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions", in *Encyclopedia of Quantitative Finance*, a cura di Cont R., Wiley, Hoboken, 2010.
- Michaud R.O.: "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?", *Financial Analysts Journal*, v. 45, n. 1, 1989.

- Michaud R.O., Michaud R.O.: *Efficient Asset Management. A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, 2nd edition, Oxford University Press, New York, 2008.
- Mossin J.: "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", *Journal of Business*, v. 41, n. 2, 1968.
- Peiró A.: "Skewness in Financial Returns", *Journal of Banking and Finance*, v. 23, n. 6, 1999.
- Prakash A.J., Chang C.H., Pactwa T.E.: "Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from US, European and Latin America Equity Markets", *Journal of Banking and Finance*, v. 27, n. 7, 2003.
- Pratt J.W.: "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, v. 32, n. 1/2, 1964.
- Sarnat M.: "A Note on the Implications of Quadratic Utility for Portfolio Theory", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 9, n. 4, 1974.
- Satchell S., Scowcroft A.: "A Demystification on the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction", *Journal of Asset Management*, v. 1, n. 2, 2000.
- Scherer B.: "Portfolio Resampling: Review and Critique", *Financial Analysts Journal*, v. 58, n. 6, 2002.
- Scherer B.: *Portfolio Construction and Risk Budgeting*, 5th edition, Risk Books, London, 2015.
- Schmittmann J.M.: "Currency Hedging for International Portfolios", *IMF Working Paper*, WP/10/151, 2010.
- Scott R.C., Horwath P.A.: "On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance", *Journal of Finance*, v. 35, n. 4, 1980.
- Sharpe W.F.: "Imputing Expected Security Returns from Portfolio Composition", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 9, n. 3, 1974.
- Sharpe W.F.: "Adaptive Asset Allocation Policies", *Financial Analysts Journal*, v. 66, n. 3, 2010.
- Simkowitz M.A., Beedles W.L.: "Asymmetric Stable Distributed Security Returns", *Journal of the American Statistical Association*, v. 75, n. 370, 1980.
- Singleton J.C., Wingender J.: "Skewness Persistence in Common Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, 1986.